

MON COACH DE MATHS

Mon cahier d'activités

Tle

24 étapes, 193 questions démontrées, 4 domaines

Une fiche méthode avant chaque étape, jamais réinventée

Entoure, puis rédige ta démonstration — deux gestes pour ancrer

Le QR de chaque étape ouvre la démonstration animée du site

24 médailles à colorier, un diplôme à la fin

Les 18 démonstrations du programme, rédigées comme au tableau

Dénombrement, espace, limites, $\ln$, intégrales, loi binomiale

Comment ça marche

Chaque étape suit la même démonstration : la **fiche méthode** (ce qu'on sait, les étapes, le résultat encadré, un exemple calculé), puis **entoure la bonne réponse**, puis **je démontre** — tu rédiges toi-même trois démonstrations, comme au tableau. Les corrigés sont à la fin.



Ton coach en ligne : les mêmes séries, la démonstration animée de chaque question, les fiches en vidéo. moncoachdemath.fr

Les gestes du cahier



Lis

la fiche méthode, avant de commencer l'étape



Entoure

la bonne réponse parmi les quatre



Démontre

tu écris tes étapes et tu encadres le résultat



Colorie

ta médaille, une par étape

Corrige-toi avec le site

À la fin de chaque étape, un QR code : scanne-le, et tu retrouves la série sur **moncoachdemath.fr** avec la **démonstration animée** de chaque question — les étapes qui s'affichent une par une jusqu'au résultat encadré, C.Q.F.D.

La carte du parcours

Colorie chaque rond quand c'est fait : **M** = la méthode lue, **QCM** = l'exercice « entoure » fait,  = « je démontre » rédigé. Commence à l'étape 1 ; les étapes se suivent par domaine.

ÉTAPE	M	QCM	
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE			
1 Dénombrement : principes additif et multiplicatif			
2 Permutations, combinaisons et triangle de Pascal			
3 Vecteurs de l'espace			
4 Droites et plans de l'espace			
5 Produit scalaire dans l'espace			
6 Représentations paramétriques et équations cartésiennes			
ANALYSE			
7 Le raisonnement par récurrence			
8 Limites de suites			
9 Limites de fonctions			
10 Compléments sur la dérivation			
11 Convexité			
12 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires			
13 Logarithme népérien : réciproque et propriétés			
14 Étude de la fonction logarithme			
15 Fonctions sinus et cosinus			
16 Primitives			

LA CARTE DU PARCOURS • SUITE

ÉTAPE	M	QCM	
17 Équations différentielles			
18 Calcul intégral			
PROBABILITÉS			
19 Succession d'épreuves indépendantes			
20 Schéma de Bernoulli et loi binomiale			
21 Problèmes sur la loi binomiale			
22 Sommes de variables aléatoires			
23 Concentration et loi des grands nombres			
ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION			
24 Python : simulation et échantillons			

Mes médailles

Après chaque étape, colorie ta médaille selon tes erreurs sur les questions notées de l'exercice « entoure » : **bronze** (2 erreurs ou moins), **argent** (1 erreur ou moins), **or** (zéro erreur). Tu peux refaire une étape pour améliorer ta médaille — pas de code à saisir, ce cahier se joue entièrement sur le papier.

ÉTAPE	BRONZE	ARGENT	OR
1 Dénombrement : principes additif et multiplicatif	☐	☐	☐
2 Permutations, combinaisons et triangle de Pascal	☐	☐	☐
3 Vecteurs de l'espace	☐	☐	☐
4 Droites et plans de l'espace	☐	☐	☐
5 Produit scalaire dans l'espace	☐	☐	☐
6 Représentations paramétriques et équations cartésiennes	☐	☐	☐
7 Le raisonnement par récurrence	☐	☐	☐
8 Limites de suites	☐	☐	☐
9 Limites de fonctions	☐	☐	☐
10 Compléments sur la dérivation	☐	☐	☐
11 Convexité	☐	☐	☐
12 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires	☐	☐	☐
13 Logarithme népérien : réciproque et propriétés	☐	☐	☐
14 Étude de la fonction logarithme	☐	☐	☐
15 Fonctions sinus et cosinus	☐	☐	☐
16 Primitives	☐	☐	☐
17 Équations différentielles	☐	☐	☐
18 Calcul intégral	☐	☐	☐

MES MÉDAILLES • SUITE

ÉTAPE	BRONZE	ARGENT	OR
19 Succession d'épreuves indépendantes			
20 Schéma de Bernoulli et loi binomiale			
21 Problèmes sur la loi binomiale			
22 Sommes de variables aléatoires			
23 Concentration et loi des grands nombres			
24 Python : simulation et échantillons			

Dénombrement : principes additif et multiplicatif

Compter sans tout énumérer : deux principes suffisent, à eux seuls, à dénombrer des ensembles bien trop grands pour qu'on les liste à la main.

Les mots à connaître

- **k-uplet (ou k-liste)** — Une liste ORDONNÉE de k éléments (répétitions autorisées), notée $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Deux k -uplets sont différents dès que l'ORDRE change.
- **produit cartésien** — L'ensemble de tous les couples, triplets ou k -uplets qu'on peut former en prenant un élément dans chacun de plusieurs ensembles.
- **partie d'un ensemble** — Un sous-ensemble, sans ordre entre ses éléments : $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ désignent la MÊME partie.

Ce que je sais déjà

· Principe ADDITIF : si deux ensembles sont disjoints (aucun élément commun), le nombre d'éléments de leur réunion est la SOMME de leurs effectifs.

· Principe MULTIPLICATIF : le nombre d'éléments d'un produit cartésien de plusieurs ensembles est le PRODUIT de leurs effectifs — chaque choix se fait indépendamment des autres.

· Le nombre de k -uplets d'un ensemble à n éléments (répétitions autorisées) est n^k ; le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .

La méthode

- 1 Je repère si la situation demande d'ADDITIONNER (des cas qui s'excluent, on ne peut être que dans l'un ou dans l'autre) ou de MULTIPLIER (des choix successifs et indépendants).
- 2 Pour des choix indépendants dans plusieurs ensembles, j'utilise le principe multiplicatif : je multiplie les effectifs de chaque ensemble.
- 3 Pour des k -uplets avec répétitions autorisées d'un ensemble à n éléments, chaque position se choisit indépendamment parmi les n éléments : $n \times n \times \dots \times n = n^k$.
- 4 Pour le nombre de parties d'un ensemble à n éléments, je vois chaque élément comme un choix binaire (en faire partie ou non) : $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$.

Cas disjoints : on ADDITIONNE. Choix indépendants : on MULTIPLIE. Un ensemble à n éléments a 2^n parties, et n^k k -uplets (répétitions autorisées).

Dénombrement : principes additif et multiplicatif — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Un digicode utilise 4 chiffres parmi 10 (de 0 à 9), avec répétitions possibles.

Chacune des 4 positions se choisit indépendamment parmi 10 chiffres : c'est un 4-uplet d'un ensemble à 10 éléments.

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\ 000.$$

Il existe 10 000 codes possibles.

Attention au piège

Multiplier alors que les cas sont disjoints (ou l'inverse) : « 5 crêpes sucrées OU 3 crêpes salées » se compte en ADDITIONNANT (8 crêpes en tout, un choix exclusif), alors que « une crêpe ET une boisson » se compte en MULTIPLIANT (un choix de chaque catégorie).

Dénombrement : principes additif et multiplicatif — entoure la bonne réponse

Rappel : Cas disjoints : on ADDITIONNE. Choix indépendants : on MULTIPLIE. Un ensemble à n éléments a 2^n parties, et n^k k -uplets (répétitions autorisées).

 **Entoure la bonne réponse.**

REGARDE

Le club de Fatou propose 5 activités de plein air et 3 activités en salle, aucune activité n'appartenant aux deux listes à la fois. Combien d'activités le club propose-t-il en tout ?

53

2

8

15

1. Un menu se compose d'une entrée parmi 4 et d'un dessert parmi 3 (un choix de chaque catégorie). Combien de menus (entrée, dessert) peut-on composer ?

81

7

12

64

2. Avec un alphabet de 4 lettres, combien de mots de 3 lettres peut-on former, les répétitions étant autorisées ?

64

4

24

81

3. Un ensemble E possède 5 éléments. Combien de parties (sous-ensembles) possède E , en comptant l'ensemble vide et E lui-même ?

120

32

25

10

4. On tire successivement et sans remise 3 cartes parmi 6 cartes numérotées, en notant l'ordre du tirage. Combien de tirages ordonnés sont possibles ?

120

216

6

20

5. De combien de façons peut-on ranger 5 livres différents côte à côte sur une étagère ?

32

20

120

1

ÉTAPE 1 • EXERCICE 1 (SUITE)

6. Une succession de 5 épreuves de Bernoulli est réalisée (chaque épreuve donnant « Succès » ou « Échec »).
Combien de résultats (suites des 5 issues) sont possibles ?

10

25

120

32

7. Un repas se compose d'une entrée parmi 3, d'un plat parmi 4 et d'un dessert parmi 2. Combien de repas complets (entrée, plat, dessert) peut-on composer ?

12

64

9

24

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Le club de Fatou propose 5 activités de plein air et 3 activités en salle, aucune activité n'appartenant aux deux listes à la fois. Combien d'activités le club propose-t-il en tout ?

1. Les deux listes d'activités sont deux ensembles disjoints (aucune activité commune) : par le principe additif, le nombre total d'activités est la somme des deux effectifs.
2. $5 + 3 = 8$

Le club propose 8 activités en tout.

1. Un menu se compose d'une entrée parmi 4 et d'un dessert parmi 3 (un choix de chaque catégorie). Combien de menus (entrée, dessert) peut-on composer ?

Résultat :

2. Avec un alphabet de 4 lettres, combien de mots de 3 lettres peut-on former, les répétitions étant autorisées ?

Résultat :

3. Un ensemble E possède 5 éléments. Combien de parties (sous-ensembles) possède E, en comptant l'ensemble vide et E lui-même ?

Résultat :

Permutations, combinaisons et triangle de Pascal

La question qui change tout avant de compter : l'ORDRE compte-t-il, ou seulement le GROUPE final ? La réponse choisit entre trois outils : factorielle, arrangement, combinaison.

Les mots à connaître

- **factorielle n ($n!$)** — Le nombre de permutations (rangements ordonnés) d'un ensemble à n éléments : $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$.
- **combinaison** — Un choix de k éléments parmi n , SANS ordre entre eux (un groupe, une équipe). Noté $(n \ k)$, lu « k parmi n ».
- **triangle de Pascal** — Le tableau qui range les coefficients binomiaux $(n \ k)$: chaque coefficient est la somme des deux qui sont juste au-dessus de lui, dans la ligne précédente.

Ce que je sais déjà

- Un rangement de n éléments distincts (l'ordre compte, aucune répétition, tous les éléments sont utilisés) se compte par $n!$.
- Un k -uplet d'éléments DISTINCTS d'un ensemble à n éléments (l'ordre compte) se compte par $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$.
- Une combinaison de k éléments parmi n (l'ordre NE compte PAS) se compte par $(n \ k) = n! / (k!(n - k)!)$.
- Cas particuliers : $(n \ 0) = 1$, $(n \ 1) = n$. Symétrie : $(n \ k) = (n, n - k)$. Relation de Pascal : $(n \ k) = (n - 1, k - 1) + (n - 1, k)$.

La méthode

- 1 Je me demande si l'ORDRE du choix a une importance dans la situation (des postes différents, un classement) ou non (un simple groupe, une équipe).
- 2 Si l'ordre compte et que tous les éléments sont utilisés : je calcule $n!$. S'il compte mais que je n'en choisis que k parmi n : je calcule $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$.
- 3 Si l'ordre ne compte pas, je calcule la combinaison $(n \ k)$, à l'aide de la formule ou du triangle de Pascal.
- 4 Pour une valeur particulière, j'utilise les cas connus ($(n \ 0) = 1$, $(n \ 1) = n$), la symétrie, ou la relation de Pascal, plutôt que de tout recalculer.

Ordre + tous les éléments : $n!$. Ordre + k parmi n : $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$. Pas d'ordre : $(n \ k) = n! / (k!(n - k)!)$.

Permutations, combinaisons et triangle de Pascal — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Un tiercé (3 chevaux, dans l'ordre) est à choisir parmi 8 chevaux au départ.

L'ordre compte : c'est un 3-uplet d'éléments distincts parmi 8.

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Il y a 336 tiercés possibles — et non $\binom{8}{3} = 56$, qui ne compterait que les groupes de 3 chevaux sans tenir compte de leur ordre d'arrivée.

Attention au piège

Confondre un arrangement (l'ordre compte, $n \times (n - 1) \times \dots$) avec une combinaison (l'ordre ne compte pas, $\binom{n}{k}$) : les deux comptent des k-uplets d'éléments distincts, mais un arrangement compte $k!$ fois plus, une fois pour chaque ordre possible des mêmes k éléments.

Permutations, combinaisons et triangle de Pascal — entoure la bonne réponse

Rappel : Ordre + tous les éléments : $n!$. Ordre + k parmi n : $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$. Pas d'ordre : $(n \ k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.

 **Entoure la bonne réponse.**

REGARDE

Combien y a-t-il de façons de classer 6 coureurs à l'arrivée d'une course, en supposant qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

30

1

720

64

1. Un jury de 8 candidats doit élire un président, un secrétaire et un trésorier (une même personne ne peut cumuler deux postes). Combien de compositions du bureau sont possibles ?

512

336

40 320

56

2. On choisit une équipe de 4 joueurs parmi 10 pour un match amical, l'ordre du choix n'ayant pas d'importance. Combien d'équipes différentes peut-on former ?

5 040

40

14

210

3. Sans aucun calcul, que vaut $(^{15}_0)$, le nombre de façons de choisir 0 élément parmi 15 ?

0

1

1 307 674 368 000

15

4. Sans aucun calcul, que vaut $(^7_1)$, le nombre de façons de choisir 1 élément parmi 7 ?

5 040

1

42

7

5. Que vaut $(^6_2)$, le nombre de façons de choisir 2 éléments parmi 6 ?

15

12

30

3

6. On sait que $(^{10}_3) = 120$. Que vaut $(^{10}_7)$ sans nouveau calcul ?

120

10

240

1

ÉTAPE 2 · EXERCICE 1 (SUITE)

7. D'après la relation de Pascal, $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$. Sachant que $\binom{4}{1} = 4$ et $\binom{4}{2} = 6$, que vaut $\binom{5}{2}$?

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Combien y a-t-il de façons de classer 6 coureurs à l'arrivée d'une course, en supposant qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

1. Un classement sans ex-æquo est une permutation des 6 coureurs : le premier range se choisit parmi 6 coureurs, le deuxième parmi les 5 restants, etc.
2. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Il y a 720 classements possibles.

1. Un jury de 8 candidats doit élire un président, un secrétaire et un trésorier (une même personne ne peut cumuler deux postes). Combien de compositions du bureau sont possibles ?

Résultat :

2. On choisit une équipe de 4 joueurs parmi 10 pour un match amical, l'ordre du choix n'ayant pas d'importance. Combien d'équipes différentes peut-on former ?

Résultat :

3. Sans aucun calcul, que vaut ($^{15}_0$), le nombre de façons de choisir 0 élément parmi 15 ?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 1 • Dénombrement : principes additif et multiplicatif

Rappel : Cas disjoints : on ADDITIONNE. Choix indépendants : on MULTIPLIE. Un ensemble à n éléments a 2^n parties, et n^k k -uplets (répétitions autorisées).



Scanne le code : la série « Dénombrement : principes additif et multiplicatif » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Dénombrement : principes additif et multiplicatif » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=denombrement-principes-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 2 • Permutations, combinaisons et triangle de Pascal

Rappel : Ordre + tous les éléments : $n!$. Ordre + k parmi n : $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$. Pas d'ordre : $(n k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.



Scanne le code : la série « Permutations, combinaisons et triangle de Pascal » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Permutations, combinaisons et triangle de Pascal » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=permutations-combinaisons-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Vecteurs de l'espace

Le calcul vectoriel du plan se prolonge dans l'espace sans rien perdre — sauf qu'il faut désormais surveiller TROIS coordonnées, pas deux, avant de conclure.

Les mots à connaître

- **combinaison linéaire** — Un vecteur obtenu en additionnant des multiples d'autres vecteurs, comme $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.
- **vecteurs coplanaires** — Trois vecteurs de l'espace tels que l'un s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres.
- **base de l'espace** — Trois vecteurs non coplanaires : tout vecteur de l'espace se décompose alors, de façon UNIQUE, comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Ce que je sais déjà

· Une combinaison linéaire de vecteurs de l'espace se calcule coordonnée par coordonnée, exactement comme dans le plan, mais sur TROIS coordonnées.

· $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel t tel que $\vec{u} = t \times \vec{v}$ — la MÊME relation doit être vérifiée sur les trois coordonnées à la fois.

· Trois vecteurs sont coplanaires si l'un est combinaison linéaire des deux autres ; ils forment une base de l'espace dans le cas contraire.

· Décomposer un vecteur $\vec{w}$ sur une base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, c'est trouver x, y, z tels que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: ce triplet $(x; y; z)$ donne les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base.

La méthode

- 1 Pour une combinaison linéaire, je calcule chaque terme séparément, coordonnée par coordonnée, puis j'additionne.
- 2 Pour tester une colinéarité, je cherche le rapport t entre deux coordonnées, PUIS je vérifie qu'il est bien le même sur la troisième.
- 3 Pour tester une coplanarité, je cherche s'il existe des réels a et b tels qu'un des trois vecteurs soit égal à a fois le premier plus b fois le second — un système à résoudre coordonnée par coordonnée.
- 4 Si aucune combinaison linéaire de deux des vecteurs ne donne le troisième, les trois vecteurs ne sont pas coplanaires : ils forment une base.

Colinéaires : même rapport sur les TROIS coordonnées. Coplanaires : l'un est combinaison linéaire des deux autres. Sinon : base de l'espace.

Vecteurs de l'espace — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Soit $\vec{u}(1; 1; 1)$, $\vec{v}(2; 0; -1)$ et $\vec{w}(4; 2; 1)$. Je cherche si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

La deuxième coordonnée donne $a = 2$ (car $0 \times b$ n'apporte rien : $2 = 2 \times 1 + b \times 0$).

Je vérifie sur les deux autres : $2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$ et $2 \times 1 + 1 \times (-1) = 1$.

Les trois coordonnées correspondent : $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$. Les trois vecteurs sont coplanaires.

Attention au piège

Ne vérifier une colinéarité ou une combinaison linéaire que sur DEUX coordonnées sur trois, en oubliant la troisième : dans l'espace, une égalité de rapports sur deux coordonnées ne suffit jamais à conclure — c'est le piège le plus fréquent en passant du plan à l'espace.

Vecteurs de l'espace — entoure la bonne réponse

Rappel : Colinéaires : même rapport sur les TROIS coordonnées. Coplanaires : l'un est combinaison linéaire des deux autres. Sinon : base de l'espace.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

$\vec{u}$ a pour coordonnées (1 ; 2 ; -1) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (0 ; 3 ; 2). Quelles sont les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$?

(1 ; 1 ; -4)

(2 ; -1 ; 0)

(2 ; 7 ; 0)

(2 ; 1 ; -4)

1. $\vec{u}$ a pour coordonnées (3 ; -1 ; 2) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (-2 ; 4 ; 0). Quelles sont les coordonnées de $-3\vec{u} + 2\vec{v}$?

(-13 ; 11 ; -6)

(-5 ; 3 ; -6)

(13 ; 11 ; -6)

(-13 ; -11 ; -6)

2. $\vec{u}$ a pour coordonnées (4 ; -6 ; 10) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (-2 ; 3 ; k). Pour quelle valeur de k $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

-6,67

5

-5

-15

3. Dans une base $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace, un vecteur $\vec{w}$ vérifie $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base ?

(3 ; -2 ; 5)

(5 ; -2 ; 3)

(-2 ; 3 ; 5)

(3 ; 2 ; 5)

4. $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$, $\vec{v}(2 ; 0 ; -1)$ et $\vec{w}(4 ; 2 ; 1)$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Oui, car $\langle \vec{w} \rangle = 2\langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{v} \rangle$

On ne peut pas savoir sans un repère orthonormé

Oui, car $\langle \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0$

Non, car aucune de leurs coordonnées n'est proportionnelle

ÉTAPE 3 · EXERCICE 1 (SUITE)

5. $\vec{u}(2; -4; 6)$ et $\vec{v}(-1; 2; -4)$. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

Non, car la troisième coordonnée ne respecte pas la même proportionnalité que les deux premières

Oui, car la somme des coordonnées de $\vec{v}$ est la moitié de celle de $\vec{u}$

Non, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même norme

Oui, car les deux premières coordonnées sont proportionnelles (rapport $-0,5$)

6. $\vec{u}(1; 0; 2)$, $\vec{v}(0; 1; -1)$ et $\vec{w}(3; -3; 7)$. A-t-on $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$?

Oui, car $2\vec{u} - 3\vec{v} = (2; -3; 7) = \vec{w}$

Non, car il faudrait $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

On ne peut pas savoir sans une base orthonormée

Non, car les coordonnées ne correspondent pas

7. $\vec{u}(1; 0; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 0)$ et $\vec{w}(0; 0; 1)$. Ces trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

Non, car ils ne sont pas colinéaires deux à deux

Oui, car aucun n'est combinaison linéaire des deux autres

Oui, car leur somme a pour coordonnées $(1; 1; 1)$

Non, car leurs normes sont toutes égales à 1

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

$\vec{u}$ a pour coordonnées (1 ; 2 ; -1) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (0 ; 3 ; 2). Quelles sont les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$?

1. Dans l'espace comme dans le plan, une combinaison linéaire de vecteurs se calcule coordonnée par coordonnée : $2\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; 4 ; -2).
2. $2\vec{u} - \vec{v}$: (2 - 0 ; 4 - 3 ; -2 - 2)

$2\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées (2 ; 1 ; -4).

1. $\vec{u}$ a pour coordonnées (3 ; -1 ; 2) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (-2 ; 4 ; 0). Quelles sont les coordonnées de $-3\vec{u} + 2\vec{v}$?

Résultat :

2. $\vec{u}$ a pour coordonnées (4 ; -6 ; 10) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (-2 ; 3 ; k). Pour quelle valeur de k $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Résultat :

3. Dans une base $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace, un vecteur $\vec{w}$ vérifie $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base ?

Résultat :

Droites et plans de l'espace

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles : il faut désormais compter TROIS positions relatives, pas deux.

Les mots à connaître

- **vecteur directeur** — Un vecteur non nul qui donne la direction d'une droite. Une droite est entièrement caractérisée par un point et un vecteur directeur.
- **direction d'un plan** — L'ensemble des vecteurs colinéaires aux combinaisons linéaires des deux vecteurs non colinéaires qui dirigent ce plan.
- **droites non coplanaires** — Deux droites de l'espace qui ne sont ni parallèles ni sécantes : elles n'appartiennent à aucun plan commun (contrairement au plan, où deux droites sont toujours sécantes ou parallèles).

Ce que je sais déjà

- Un plan de l'espace se caractérise par un point et un COUPLE de vecteurs NON colinéaires : deux vecteurs colinéaires ne dirigent qu'une droite.
- Deux droites de vecteurs directeurs colinéaires sont parallèles (confondues si elles partagent un point, strictement parallèles sinon).
- Une droite est parallèle à un plan si son vecteur directeur est une combinaison linéaire des deux vecteurs qui dirigent le plan — pas seulement colinéaire à l'un des deux.
- Trois vecteurs de l'espace forment une base si et seulement si aucun n'est combinaison linéaire des deux autres (ils ne sont pas coplanaires).

La méthode

- 1 Je compare les vecteurs directeurs (ou les directions) des deux objets à situer l'un par rapport à l'autre.
- 2 Pour deux droites : je regarde si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires (parallèles) ou non (sécantes si elles ont un point commun, non coplanaires sinon).
- 3 Pour une droite et un plan : je regarde si le vecteur directeur de la droite est combinaison linéaire des deux vecteurs du plan (parallèle) ou non (sécants).
- 4 Pour trois vecteurs donnés : je cherche si l'un s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres ; si c'est impossible, ils forment une base de l'espace.

Vecteurs directeurs colinéaires : parallèles. Vecteur directeur combinaison linéaire des deux vecteurs du plan : parallèle au plan. Aucune combinaison linéaire possible : sécants, ou base.

Droites et plans de l'espace — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Un plan P est dirigé par $\vec{a}(1; 0; 1)$ et $\vec{b}(0; 1; -1)$. Une droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$.

Je cherche si $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

$$(1; 0; 1) + (0; 1; -1) = (1; 1; 0).$$

C'est exactement $\vec{u}$: d est parallèle à P .

Attention au piège

Vérifier si le vecteur directeur de la droite est colinéaire à l'UN des deux vecteurs du plan, au lieu de chercher s'il est combinaison linéaire des DEUX : un vecteur peut n'être colinéaire à aucun des deux vecteurs du plan, et pourtant appartenir à sa direction.

Droites et plans de l'espace — entoure la bonne réponse

Rappel : Vecteurs directeurs colinéaires : parallèles. Vecteur directeur combinaison linéaire des deux vecteurs du plan : parallèle au plan. Aucune combinaison linéaire possible : sécants, ou base.

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

$A(1 ; 2 ; -1)$ et $B(3 ; -2 ; 5)$. Quel vecteur est un vecteur directeur de la droite (AB) ?

(2 ; 4 ; 6)

(4 ; 0 ; 4)

(2 ; -4 ; 6)

(2 ; 0 ; 2)

1. d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ et d_2 , non confondue avec d_1 , a pour vecteur directeur $\vec{v}(-4 ; 2 ; -6)$.
Que peut-on dire de d_1 et d_2 ?

d_1 et d_2 sont
perpendiculaires, car
 $\vec{u} \cdot \vec{v}$
 $= 0$

d_1 et d_2 sont
sécantes, car elles
ne sont pas
confondues

d_1 et d_2 sont
strictement
parallèles, car leurs
vecteurs directeurs
sont colinéaires

d_1 et d_2 sont
orthogonales, car
leurs vecteurs
directeurs sont
colinéaires

ÉTAPE 4 · EXERCICE 1 (SUITE)

2. Un plan P est dirigé par $\vec{a}(1; 0; 1)$ et $\vec{b}(0; 1; -1)$. Une droite d , non incluse dans P , a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$. Que peut-on dire de la position relative de d et P ?

d est orthogonale à P

d est sécante à P, car
 $\vec{u}$
n'est colinéaire ni à $\vec{a}$
ni à $\vec{b}$

**d est strictement
parallèle à P, car**
 $\vec{u}$
= $\vec{a}$
+ $\vec{b}$

**On ne peut pas savoir
sans un point de d**

3. Deux plans de l'espace sont chacun définis par un point et un couple de vecteurs non colinéaires qui les dirigent. Les deux couples de vecteurs directeurs engendrent exactement la même direction, mais les deux plans ne passent pas par les mêmes points. Que peut-on affirmer sur ces deux plans ?

**Ils sont sécants
selon une droite**

Ils sont confondus

**Ils sont strictement
parallèles**

**Ils sont
perpendiculaires**

ÉTAPE 4 · EXERCICE 1 (SUITE)

4. $A(0; 0; 0)$, $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{v}(-2; -4; 2)$. Peut-on définir un plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Oui, car A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont trois données distinctes

Oui, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas égaux

Non, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Non, car A est l'origine du repère

5. d_1 passe par $A(1; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$. d_2 passe aussi par A et a pour vecteur directeur $\vec{v}(0; 1; 1)$. Que peut-on dire de d_1 et d_2 ?

d_1 et d_2 sont confondues

d_1 et d_2 sont parallèles, car elles partagent le point A

d_1 et d_2 sont sécantes en A, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires

On ne peut pas savoir sans un vecteur normal

6. $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(0; 1; 1)$ et $\vec{c}(1; 0; -1)$. Ces trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

Oui, car leur somme n'est pas nulle

Non, car ils ne sont pas de même norme

Non, car leurs coordonnées ne sont pas orthogonales deux à deux

Oui, car aucun n'est combinaison linéaire des deux autres

7. Une droite d et un plan P n'ont aucun point commun. Que peut-on affirmer sur leur position relative ?

d est incluse dans P

d est strictement parallèle à P

d est sécante à P

d est orthogonale à P

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

$A(1 ; 2 ; -1)$ et $B(3 ; -2 ; 5)$. Quel vecteur est un vecteur directeur de la droite (AB) ?

1. Un vecteur directeur de (AB) est $\vec{AB}$, de coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
2. $(3 - 1 ; -2 - 2 ; 5 - (-1)) = (2 ; -4 ; 6)$

$\vec{AB}(2 ; -4 ; 6)$ est un vecteur directeur de (AB) .

1. d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ et d_2 , non confondue avec d_1 , a pour vecteur directeur $\vec{v}(-4 ; 2 ; -6)$. Que peut-on dire de d_1 et d_2 ?

Résultat :

2. Un plan P est dirigé par $\vec{a}(1 ; 0 ; 1)$ et $\vec{b}(0 ; 1 ; -1)$. Une droite d , non incluse dans P , a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 1 ; 0)$. Que peut-on dire de la position relative de d et P ?

Résultat :

3. Deux plans de l'espace sont chacun définis par un point et un couple de vecteurs non colinéaires qui les dirigent. Les deux couples de vecteurs directeurs engendrent exactement la même direction, mais les deux plans ne passent pas par les mêmes points. Que peut-on affirmer sur ces deux plans ?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 3 • Vecteurs de l'espace

Rappel : Colinéaires : même rapport sur les TROIS coordonnées. Coplanaires : l'un est combinaison linéaire des deux autres. Sinon : base de l'espace.



Scanne le code : la série « Vecteurs de l'espace » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Vecteurs de l'espace » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=vecteurs-espace-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 4 • Droites et plans de l'espace

Rappel : Vecteurs directeurs colinéaires : parallèles. Vecteur directeur combinaison linéaire des deux vecteurs du plan : parallèle au plan. Aucune combinaison linéaire possible : sécants, ou base.



Scanne le code : la série « Droites et plans de l'espace » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Droites et plans de l'espace » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=droites-plans-espace-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Produit scalaire dans l'espace

$xx' + yy'$ devient $xx' + yy' + zz'$: le produit scalaire s'étend à l'espace avec un seul terme de plus — mais c'est justement celui qu'on oublie.

Les mots à connaître

- **vecteur normal à un plan** — Un vecteur non nul orthogonal à TOUS les vecteurs de la direction du plan. Pour le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ lui est normal.
- **projeté orthogonal sur un plan** — Le point H du plan tel que $\vec{MH}$ soit colinéaire au vecteur normal du plan : c'est le point du plan le plus proche de M.

Ce que je sais déjà

- En base orthonormée, $\vec{u}(x ; y ; z) \cdot \vec{v}(x' ; y' ; z') = xx' + yy' + zz'$ — TROIS produits à additionner, pas deux.
- La norme se calcule par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Deux vecteurs (ou deux droites, par leurs vecteurs directeurs) sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- La distance d'un point A($x_A ; y_A ; z_A$) au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ vaut $|ax_A + by_A + cz_A + d| / \|\vec{n}\|$, avec $\vec{n}(a ; b ; c)$.

La méthode

- 1 Je repère les coordonnées des vecteurs concernés, ou j'identifie le vecteur normal à partir de l'équation du plan.
- 2 Pour un produit scalaire ou une norme, je calcule bien les TROIS termes (x, y ET z), jamais deux seulement.
- 3 Pour tester une orthogonalité, je vérifie si le produit scalaire est nul.
- 4 Pour une distance point-plan, j'applique la formule avec le vecteur normal, sans oublier de diviser par sa norme.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'; \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \text{distance au plan} = |a \cdot x_A + b \cdot y_A + c \cdot z_A + d| / \|\vec{n}\|.$$

Un exemple entièrement calculé

Le plan P a pour équation $x + 2y + 2z - 3 = 0$: son vecteur normal est $\vec{n}(1 ; 2 ; 2)$, de norme $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

Je calcule la distance du point O(0 ; 0 ; 0) à P.

$$|1 \times 0 + 2 \times 0 + 2 \times 0 - 3| = 3.$$

$$3 / 3 = 1.$$

La distance de O au plan P vaut 1.

Attention au piège

Oublier le troisième terme (celui en z) dans un produit scalaire ou une norme de l'espace : le réflexe pris dans le plan (deux termes) laisse filer exactement le terme qui distingue l'espace du plan.

Produit scalaire dans l'espace — entoure la bonne réponse

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; distance au plan = $|a \cdot xA + b \cdot yA + c \cdot zA + d| / \|\vec{n}\|$.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; -1 ; 3) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (4 ; -3 ; -2). Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

5

2

11

-1

1. $\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; -3 ; 6) dans une base orthonormée. Que vaut $\|\vec{u}\|$?

49

$\sqrt{13}$

7

5

2. $\vec{u}$ a pour coordonnées (3 ; -2 ; 4) et $\vec{v}$ a pour coordonnées (2 ; 5 ; k) dans une base orthonormée. Pour quelle valeur de k $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

4

-1

0

1

3. Le plan P a pour équation cartésienne $2x - y + 3z - 5 = 0$. Quel vecteur est normal à P ?

(1 ; 2 ; 0)

(5 ; -1 ; 3)

(2 ; 1 ; 3)

(2 ; -1 ; 3)

4. P est le plan d'équation $x = 0$. M(5 ; 3 ; -2). Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur P ?

(0 ; 3 ; -2)

(5 ; 0 ; 0)

(0 ; 3 ; 0)

(5 ; 3 ; 0)

5. Quelle est la distance du point O(0 ; 0 ; 0) au plan P d'équation $x + 2y + 2z - 3 = 0$?

3

1/3

9

1

ÉTAPE 5 · EXERCICE 1 (SUITE)

6. d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{v}(2; -1; 0)$. Les droites d_1 et d_2 sont-elles orthogonales ?

Oui, car $\langle \vec{u} \cdot \vec{v} \rangle$
et $\langle \vec{v} \cdot \vec{u} \rangle$
sont colinéaires

Non, car $\langle \vec{u} \cdot \vec{v} \rangle$
 $\cdot \langle \vec{v} \cdot \vec{u} \rangle$
 $= 4$

Oui, car $\langle \vec{u} \cdot \vec{v} \rangle$
 $\cdot \langle \vec{v} \cdot \vec{u} \rangle$
 $= 0$

On ne peut pas savoir
sans les points de d_1
et d_2

7. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. Que vaut $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$?

29

25

21

27

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Dans une base orthonormée, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2 ; -1 ; 3)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(4 ; -3 ; -2)$. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

1. En base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se calcule par $xx' + yy' + zz'$: TROIS termes, un par coordonnée.
2. $2 \times 4 + (-1) \times (-3) + 3 \times (-2) = 8 + 3 - 6 = 5$
3. Oublier le terme en z (celui qui distingue l'espace du plan) donnerait $8 + 3 = 11$, une erreur fréquente en passant du plan à l'espace.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5.$$

1. $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2 ; -3 ; 6)$ dans une base orthonormée. Que vaut $\|\vec{u}\|$?

Résultat :

2. $\vec{u}$ a pour coordonnées $(3 ; -2 ; 4)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(2 ; 5 ; k)$ dans une base orthonormée. Pour quelle valeur de k $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Résultat :

3. Le plan P a pour équation cartésienne $2x - y + 3z - 5 = 0$. Quel vecteur est normal à P ?

Résultat :

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Un repère de l'espace transforme toute question de géométrie en un système d'équations : droites et plans deviennent des formules qu'on résout, plutôt que des figures qu'on imagine.

Les mots à connaître

- **représentation paramétrique** — Un système qui donne les coordonnées de TOUS les points d'une droite en fonction d'un paramètre k : $x = x_0 + ak$, $y = y_0 + bk$, $z = z_0 + ck$.
- **équation cartésienne d'un plan** — Une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ vérifiée par TOUS les points du plan, et seulement eux, où $(a ; b ; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Ce que je sais déjà

· La droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$ a pour représentation paramétrique $x = x_A + ak$, $y = y_A + bk$, $z = z_A + ck$.

· Dans un système paramétrique, les coefficients devant k donnent le vecteur directeur ; les termes constants donnent un point de la droite (celui obtenu pour $k = 0$).

· M appartient à une droite paramétrée si et seulement s'il existe UNE valeur de k qui vérifie SIMULTANÉMENT les trois équations.

· Le plan passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ a pour équation cartésienne $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

La méthode

- 1 Pour écrire une représentation paramétrique, je place les coordonnées du point en constantes, et celles du vecteur directeur en coefficients de k .
- 2 Pour tester l'appartenance d'un point, je déduis k d'UNE seule équation (souvent celle en x), puis je vérifie qu'il convient aux deux autres.
- 3 Pour une équation de plan, je développe $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ et je regroupe la constante.
- 4 Pour une intersection droite-plan, je substitue les expressions paramétriques de x, y, z dans l'équation du plan, et je résous en k .

Droite : $x = x_0 + ak$, $y = y_0 + bk$, $z = z_0 + ck$. Plan : $ax + by + cz + d = 0$, de vecteur normal $(a ; b ; c)$. Intersection : on substitue, puis on résout.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

La droite d a pour représentation paramétrique $x = 1 + k$, $y = 2 - k$, $z = 3 + 2k$, et le plan P a pour équation $x + y + z - 10 = 0$.

Je substitue : $(1 + k) + (2 - k) + (3 + 2k) - 10 = 0$.

$-4 + 2k = 0$, donc $k = 2$.

Le point d'intersection a pour coordonnées $(1 + 2 ; 2 - 2 ; 3 + 4) = (3 ; 0 ; 7)$.

Attention au piège

Confondre, dans un système paramétrique, le POINT (les termes constants) et le VECTEUR DIRECTEUR (les coefficients de k) : lire un vecteur directeur en prenant les termes constants donne un point de la droite, pas sa direction.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes — entoure la bonne réponse

Rappel : Droite : $x = x_0 + ak, y = y_0 + bk, z = z_0 + ck$. Plan : $ax + by + cz + d = 0$, de vecteur normal $(a ; b ; c)$.
Intersection : on substitue, puis on résout.

 Entoure la bonne réponse.

REGARDE

$A(1 ; -2 ; 3)$ et $\vec{u}(2 ; 0 ; -1)$. Quelle est une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$?

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2k, y = -2, z \\ &= 3 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 + k, y = 0 - 2k, \\ z &= -1 + 3k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2k, y = -2, z \\ &= 3 - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2k, y = -2 + \\ &k, z = 3 \end{aligned}$$

1. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 4 - 3k, y = 1 + 2k, z = -5k$. Quel vecteur est un vecteur directeur de d ?

$$(-3 ; 2 ; -5)$$

$$(4 ; 1 ; 0)$$

$$(-3 ; 2 ; 0)$$

$$(3 ; -2 ; 5)$$

2. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 + k, y = -1 + 3k, z = 4 - 2k$. Le point $M(5 ; 8 ; -2)$ appartient-il à d ?

Oui, pour $k = 3$

Oui, pour $k = 5$

Non, aucune valeur de k ne convient

Non, car $k = 3$ ne vérifie pas la coordonnée en z

3. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 + k, y = -1 + 3k, z = 4 - 2k$. Le point $N(3 ; 3 ; 3)$ appartient-il à d ?

Oui, car ses coordonnées sont entières

Non, car $z = 3$ n'est pas un multiple de 2

Oui, pour $k = 1$

Non, car pour $k = 1$ (déduit de x), l'ordonnée $-1 + 3 \times 1 = 2$ ne correspond pas à 3

4. $A(1 ; 2 ; -1)$ et $\vec{n}(3 ; -1 ; 2)$. Quelle est l'équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$?

$$3x - y + 2z + 3 = 0$$

$$3x - y + 2z - 1 = 0$$

$$3x - y + 2z + 1 = 0$$

$$x - 3y + 2z + 1 = 0$$

ÉTAPE 6 · EXERCICE 1 (SUITE)

5. Le plan P a pour équation cartésienne $4x - 2y + z - 7 = 0$. Quel vecteur est normal à P ?

(2 ; -1 ; 1)

(4 ; -2 ; 1)

(4 ; -2 ; -1)

(0 ; 0 ; 7)

6. P1 a pour équation $x + y + z - 3 = 0$ et P2 a pour équation $2x + 2y + 2z - 6 = 0$. Que peut-on dire de P1 et P2 ?

P1 et P2 sont
confondus (les deux
équations sont
proportionnelles)

P1 et P2 sont
perpendiculaires

P1 et P2 sont
sécants selon une
droite

P1 et P2 sont
strictement
parallèles

7. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 1 + k$, $y = 2 - k$, $z = 3 + 2k$, et le plan P a pour équation $x + y + z - 10 = 0$. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de d et P ?

(3 ; 0 ; 3)

(-1 ; 4 ; -1)

(1 ; 2 ; 3)

(3 ; 0 ; 7)

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

$A(1 ; -2 ; 3)$ et $\vec{u}(2 ; 0 ; -1)$. Quelle est une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$?

1. Une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est $x = x_A + ak, y = y_A + bk, z = z_A + ck$.
2. Ici $x_A = 1, y_A = -2, z_A = 3$ et $a = 2, b = 0, c = -1$: le terme en y ne contient aucun k ($b = 0$), et le terme en z se soustrait ($c = -1$).
3. Échanger les rôles du point et du vecteur directeur, comme dans la deuxième proposition, est une erreur fréquente.

$x = 1 + 2k, y = -2, z = 3 - k$ est une représentation paramétrique de la droite.

1. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 4 - 3k, y = 1 + 2k, z = -5k$. Quel vecteur est un vecteur directeur de d ?

Résultat :

2. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 + k, y = -1 + 3k, z = 4 - 2k$. Le point $M(5 ; 8 ; -2)$ appartient-il à d ?

Résultat :

3. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 + k, y = -1 + 3k, z = 4 - 2k$. Le point $N(3 ; 3 ; 3)$ appartient-il à d ?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 5 • Produit scalaire dans l'espace

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; distance au plan = $|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c \cdot z_A + d| / \|\vec{n}\|$.



Scanne le code : la série « Produit scalaire dans l'espace » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Produit scalaire dans l'espace » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=produit-scalaire-espace-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 6 • Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Rappel : Droite : $x = x_0 + ak, y = y_0 + bk, z = z_0 + ck$. Plan : $ax + by + cz + d = 0$, de vecteur normal $(a ; b ; c)$.
Intersection : on substitue, puis on résout.



Scanne le code : la série « Représentations paramétriques et équations cartésiennes » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Représentations paramétriques et équations cartésiennes » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=representations-parametriques-equations-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Le raisonnement par récurrence

Une propriété vraie au départ, et qui se transmet d'un rang au suivant : voilà tout ce qu'il faut pour qu'elle soit vraie partout.

Les mots à connaître

- **initialisation** — La vérification que la propriété $P(n)$ est vraie au premier rang étudié, souvent $n = 0$ ou $n = 1$.
- **hypothèse de récurrence** — La supposition « $P(n)$ est vraie », posée au début de l'hérédité, dont on se sert pour démontrer $P(n + 1)$.
- **hérédité** — La démonstration que, SI $P(n)$ est vraie à un rang n quelconque, ALORS elle reste vraie au rang $n + 1$ — une implication, pas une affirmation.

Ce que je sais déjà

- Une démonstration par récurrence comporte toujours trois étapes, dans cet ordre : initialisation, hérédité, conclusion.
- L'hérédité seule ne prouve jamais rien : sans initialisation, on ne sait pas où la propriété commence à être vraie, si elle l'est un jour.
- La récurrence sert à établir des propriétés d'une suite : une majoration $u_n \leq M$, une minoration $u_n \geq m$, un sens de variation, ou une inégalité plus générale.

La méthode

- 1 J'énonce clairement la propriété $P(n)$ que je veux démontrer pour tout n à partir d'un rang n_0 .
- 2 Initialisation : je vérifie que $P(n_0)$ est vraie, en général par un calcul direct.
- 3 Hérédité : je suppose $P(n)$ vraie à un rang n quelconque (l'hypothèse de récurrence), et j'en déduis, par le calcul, que $P(n + 1)$ est vraie aussi.
- 4 Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 .

Initialisation vraie + hérédité vraie $\Rightarrow P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir du rang initial.

Un exemple entièrement calculé

Montrons que $u_n \leq 6$ pour tout n , sachant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 3$.

Initialisation : $u_0 = 0 \leq 6$, vrai.

Hérédité : je suppose $u_n \leq 6$. Alors $u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 3 \leq 0,5 \times 6 + 3 = 6$.

Par récurrence, $u_n \leq 6$ pour tout entier n .

Attention au piège

Rédiger une hérédité correcte sans jamais vérifier l'initialisation : l'exemple classique est la propriété « $n = n + 1$ », dont l'hérédité est triviale (il suffit d'ajouter 1 aux deux membres) mais qui n'est vraie pour aucun entier, faute d'un rang de départ.

Le raisonnement par récurrence – entoure la bonne réponse

Rappel : Initialisation vraie + hérédité vraie $\Rightarrow P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir du rang initial.

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un rang n_0 , dans quel ordre s'enchaînent les trois étapes de la démonstration ?

Initialisation,
conclusion, hérédité

Hérédité, conclusion

Initialisation,
hérédité, conclusion

Hérédité,
initialisation,
conclusion

1. Un élève démontre correctement l'hérédité d'une propriété $P(n)$ pour une suite (« si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie »), mais ne vérifie jamais l'initialisation. Que peut-on conclure sur $P(n)$?

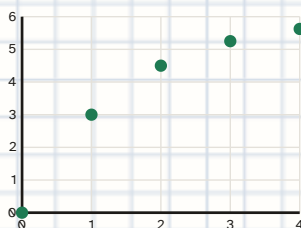
$P(n)$ est vraie pour
tout n , l'hérédité
suffit à elle seule

L'hérédité remplace
l'initialisation si elle
est bien rédigée

Rien : sans
initialisation, aucun
rang de départ n'est
prouvé, et $P(n)$ peut
être fausse pour tout
 n

$P(n)$ est vraie à
partir du rang 1

2. Une suite vérifie $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 3$ pour tout entier n . On veut démontrer par récurrence que $u_n \leq 6$ pour tout n . En supposant $u_n \leq 6$ (hypothèse de récurrence), quel majorant obtient-on pour u_{n+1} ?



4,5

6

9

3

ÉTAPE 7 · EXERCICE 1 (SUITE)

3. Une suite décroissante vérifie $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = (u_n + 4) / 2$ pour tout entier n . On veut démontrer par récurrence que $u_n \geq 4$ pour tout n . En supposant $u_n \geq 4$, quel minorant obtient-on pour u_{n+1} ?

4	7
8	2

4. Une suite vérifie $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 \times u_n - 2$ pour tout entier n . On veut démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n . En supposant $u_n \geq 1$, quel minorant obtient-on pour u_{n+1} ?

3	-2
2	1

5. Après avoir démontré l'initialisation d'une propriété $P(n)$ au rang $n_0 = 0$, puis son hérédité, quelle phrase de conclusion est correcte ?

Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $P(n)$ est vraie	$P(n + 1)$ est vraie
$P(n)$ est vraie pour un certain entier n	$P(0)$ est vraie, donc $P(n)$ est vraie

6. Une suite vérifie $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 \times u_n + 3}$ pour tout entier n . On veut démontrer par récurrence que $u_n \leq 3$ pour tout n . En supposant $u_n \leq 3$, quel majorant obtient-on pour u_{n+1} ?

9	6
4,58	3

7. Une suite vérifie $u_{n+1} - u_n = (u_n)^2 + 1$ pour tout entier n . Que peut-on affirmer sur le sens de variation de cette suite, sans même calculer sa valeur exacte ?

Elle est strictement croissante, car un carré ajouté à 1 est toujours strictement positif	Elle est strictement décroissante
Elle est constante	On ne peut rien affirmer sans connaître u_0

ÉTAPE 7 · EXERCICE 1 (SUITE)

8. Un élève calcule $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 8$ et observe que chaque terme est obtenu en ajoutant 3 au précédent. Peut-il en conclure, sans autre justification, que cela reste vrai pour tout n ?

**Oui, trois termes
suffisent à établir
une propriété pour
tout n**

**Non : observer
quelques termes ne
prouve rien pour
tout n , seule une
récurrence (ou un
calcul général) le
justifie**

**Oui, car la suite est
définie par une
formule explicite**

**Non, car il faudrait
calculer au moins
dix termes**

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un rang n_0 , dans quel ordre s'enchaînent les trois étapes de la démonstration ?

1. J'annonce d'abord l'initialisation : je vérifie que la propriété est vraie au rang de départ n_0 .
2. J'annonce ensuite l'hérédité : je suppose $P(n)$ vraie à un rang n quelconque (hypothèse de récurrence), et je démontre qu'elle reste vraie au rang $n + 1$.
3. Je conclus enfin, par le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 .

Une démonstration par récurrence suit toujours l'ordre : initialisation, hérédité, conclusion.

1. Un élève démontre correctement l'hérédité d'une propriété $P(n)$ pour une suite (« si $P(n)$ est vraie, alors $P(n + 1)$ est vraie »), mais ne vérifie jamais l'initialisation. Que peut-on conclure sur $P(n)$?

Résultat :

2. Une suite décroissante vérifie $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = (u_n + 4) / 2$ pour tout entier n . On veut démontrer par récurrence que $u_n \geq 4$ pour tout n . En supposant $u_n \geq 4$, quel minorant obtient-on pour u_{n+1} ?

Résultat :

3. Une suite vérifie $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 \times u_n - 2$ pour tout entier n . On veut démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n . En supposant $u_n \geq 1$, quel minorant obtient-on pour u_{n+1} ?

Résultat :

Limites de suites

Une suite finit-elle par exploser, par se stabiliser, ou par ne rien faire de tout cela ? Les théorèmes du chapitre répondent sans jamais calculer tous les termes.

Les mots à connaître

- **suite convergente** — Une suite qui tend vers un nombre réel ℓ : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- **théorème des gendarmes** — Si une suite est encadrée par deux autres qui tendent vers la MÊME limite, alors elle tend aussi vers cette limite.
- **théorème de comparaison** — Si $u_n \geq v_n$ et que (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend aussi vers $+\infty$ (et de même, en minorant, vers $-\infty$).

Ce que je sais déjà

· Suite géométrique (q^n) : si $-1 < q < 1$, elle tend vers 0 ; si q est strictement supérieur à 1, elle tend vers $+\infty$; si $q = 1$, elle est constante.

· Théorème de comparaison : une suite minorée par une suite qui tend vers $+\infty$ tend elle-même vers $+\infty$.

· Théorème des gendarmes : un encadrement des DEUX côtés par deux suites de même limite impose cette limite à la suite encadrée.

· Une suite croissante et majorée converge (théorème admis), mais pas nécessairement vers son majorant.

· Modéliser un phénomène d'évolution (capital avec intérêts et versement fixe, population...) donne souvent une relation de récurrence $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

La méthode

- 1 Je reconnais d'abord la forme de la suite : limite usuelle connue, suite géométrique, encadrement possible, ou comparaison à une suite de référence.
- 2 Pour une suite géométrique, je compare $|q|$ à 1 pour choisir le bon résultat de limite.
- 3 Pour une comparaison, je vérifie que l'inégalité utilisée est valable à partir d'un certain rang, et je m'assure que la suite de comparaison a bien la limite voulue.
- 4 Pour les gendarmes, je vérifie que j'ai bien un encadrement des DEUX côtés, jamais une seule majoration ou une seule minoration.

Suivant le cas : limites usuelles, limite de (q^n) selon la position de q par rapport à 1 et à -1, théorème de comparaison, théorème des gendarmes, ou suite croissante majorée (convergente).

Limites de suites — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Pour tout $n \geq 1$, $-1/n^2 \leq \cos(n)/n^2 \leq 1/n^2$.

Comme $-1/n^2$ et $1/n^2$ tendent toutes deux vers 0 , le théorème des gendarmes donne $\lim \cos(n)/n^2 = 0$.

Attention au piège

Conclure avec le théorème des gendarmes à partir d'un seul encadrement (une seule majoration, par exemple) : il faut impérativement les DEUX côtés, avec la MÊME limite de chaque côté.

Limites de suites — entoure la bonne réponse

Rappel : Suivant le cas : limites usuelles, limite de (q^n) selon la position de q par rapport à 1 et à -1 , théorème de comparaison, théorème des gendarmes, ou suite croissante majorée (convergente).

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Comment traduit-on, par définition, le fait qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$?

Un seul terme de la suite dépasse A

La suite est croissante

Tout intervalle $[A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang

La suite prend des valeurs de plus en plus grandes, sans autre précision

1. Comment traduit-on, par définition, le fait qu'une suite (u_n) converge vers le réel ℓ ?

ℓ est le plus grand terme de la suite

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang

u_n se rapproche de ℓ de temps en temps

La suite finit par être constante, égale à ℓ

2. On définit $u_n = 5 - 2/n$ pour $n \geq 1$. Quelle est la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

5

0

$+\infty$

-2

3. Pour $q^n = 0,5n^n$ (où q^n désigne 0,5 à la puissance n), quelle est la limite de cette suite géométrique quand n tend vers $+\infty$?

$+\infty$

Elle n'a pas de limite

0

1

ÉTAPE 8 · EXERCICE 1 (SUITE)

4. Une suite (u_n) vérifie $u_n \geq n$ pour tout entier n . Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, que peut-on conclure sur la limite de (u_n) ?

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On ne peut rien conclure sans connaître l'expression exacte de u_n

5. Un élève sait que $u_n \leq 5 + 1/n$ pour tout n , et veut en conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$. Cette conclusion est-elle valable ?

Non : il manque une minoration, le théorème des gendarmes exige un encadrement des DEUX côtés

Oui, car $5 + 1/n$ tend vers 5

Oui, une seule majoration suffit toujours à conclure

Non, car u_n ne peut pas être majorée

6. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $-1/n^2 \leq \cos(n)/n^2 \leq 1/n^2$. Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n^2 = 0$, quelle est la limite de $\cos(n)/n^2$ quand n tend vers $+\infty$?

$+\infty$

Elle n'existe pas, car $\cos(n)$ n'a pas de limite

-1

0

7. Une suite est croissante et majorée par 10. D'après le théorème (admis), que peut-on affirmer ?

Elle converge, mais pas nécessairement vers 10

Elle diverge vers $+\infty$

Elle converge nécessairement vers 10

Elle n'est pas forcément convergente

ÉTAPE 8 · EXERCICE 1 (SUITE)

8. Un capital initial de 1 000 € augmente de 5 % chaque année, et 200 € y sont versés en plus à la fin de chaque année. Quelle relation de récurrence modélise le capital u_n après n années ?

$$u_{n+1} = u_n + 200$$

$$u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 200$$

$$u_{n+1} = 1,05 \times (u_n + 200)$$

$$u_{n+1} = 0,05 \times u_n + 200$$

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Comment traduit-on, par définition, le fait qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$?

1. La définition exige que, pour TOUT réel A aussi grand soit-il, les termes de la suite finissent par dépasser A et y rester.
2. Il ne suffit pas qu'un terme dépasse A une fois : il faut que ce soit vrai pour tous les termes à partir d'un certain rang, et cela pour tout A .

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle $[A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

1. Comment traduit-on, par définition, le fait qu'une suite (u_n) converge vers le réel ℓ ?

Résultat :

2. On définit $u_n = 5 - 2/n$ pour $n \geq 1$. Quelle est la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

Résultat :

3. Pour $q^n = 0,5n^n$ (où q^n désigne 0,5 à la puissance n), quelle est la limite de cette suite géométrique quand n tend vers $+\infty$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 7 • Le raisonnement par récurrence

Rappel : Initialisation vraie + hérédité vraie $\Rightarrow P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir du rang initial.



Scanne le code : la série « Le raisonnement par récurrence » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Le raisonnement par récurrence » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=recurrence-tle

Mes erreurs sur les 8 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 8 • Limites de suites

Rappel : Suivant le cas : limites usuelles, limite de (q^n) selon la position de q par rapport à 1 et à -1 , théorème de comparaison, théorème des gendarmes, ou suite croissante majorée (convergente).



Scanne le code : la série « Limites de suites » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Limites de suites » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=limites-de-suites-tle

Mes erreurs sur les 8 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Limites de fonctions

Une limite en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un point se lit directement sur la courbe : une asymptote horizontale ou verticale en est la trace.

Les mots à connaître

- **asymptote parallèle à un axe** — Une droite horizontale ($y = \ell$, quand la limite en l'infini vaut ℓ) ou verticale ($x = a$, quand la limite en a est infinie) dont la courbe se rapproche indéfiniment.
- **forme indéterminée** — Une situation (« $+\infty - \infty$ », entre autres) où la limite ne se lit pas directement à partir des limites de chaque terme : il faut transformer l'expression avant de conclure.
- **croissance comparée** — En $+\infty$, la fonction exponentielle l'emporte toujours sur n'importe quelle puissance de x ; en $-\infty$, c'est l'inverse : x fois une puissance de x l'emporte, sauf multiplié par e^x qui écrase tout.

Ce que je sais déjà

- Une limite finie ℓ en $+\infty$ (ou en $-\infty$) correspond à une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
- Une limite infinie en un point a correspond à une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Croissance comparée : en $+\infty$, x^n / e^x tend vers 0 , quel que soit l'entier n .
- Une forme indéterminée ne se tranche jamais à vue : je dois d'abord factoriser, développer ou multiplier par une quantité conjuguée.

La méthode

- 1 Je repère la forme de la limite : directe, opération sur des limites usuelles, ou forme indéterminée.
- 2 Pour une fraction rationnelle en l'infini, je factorise le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.
- 3 Pour une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » avec une racine carrée, je multiplie par la quantité conjuguée.
- 4 Pour une croissance comparée, je compare la vitesse de croissance de l'exponentielle à celle d'une puissance de x : l'exponentielle l'emporte toujours en $+\infty$.
- 5 Je traduis enfin la limite trouvée en asymptote, si la question le demande.

Limite finie en l'infini → asymptote horizontale ; limite infinie en un point → asymptote verticale ; forme indéterminée → toujours transformer avant de conclure.

Limites de fonctions — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Pour $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, la forme est « $+\infty - \infty$ » : je multiplie par la quantité conjuguée.

$$f(x) = (x^2 + 1 - x^2) / (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1 / (\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Attention au piège

Trancher une forme « $+\infty - \infty$ » en écrivant simplement « $\infty - \infty = 0$ » ou en additionnant les limites de chaque terme : une forme indéterminée exige toujours un calcul supplémentaire, jamais une réponse immédiate.

Limites de fonctions — entoure la bonne réponse

Rappel : Limite finie en l'infini → asymptote horizontale ; limite infinie en un point → asymptote verticale ;
forme indéterminée → toujours transformer avant de conclure.

☒ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Quelle est la limite de $f(x) = (2x^2 + 1) / (x^2 + 3)$ quand x tend vers $+\infty$?

2

$+\infty$

0

1

1. Quelle est la limite de $f(x) = -3x + 5$ quand x tend vers $-\infty$?

0

5

$-\infty$

$+\infty$

2. On définit $f(x) = 1 / (x - 2)$. Quelle droite est asymptote à la courbe de f , en lien avec le comportement de f en 2 ?

La droite d'équation
 $y = 0$

Il n'y a pas
d'asymptote

La droite d'équation
 $y = 2$

La droite d'équation
 $x = 2$

3. On définit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Sachant que $\sqrt{x^2 + 1}$ tend vers $+\infty$ et que $-x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, quelle est la limite de f en $+\infty$?

0

On ne peut rien dire,
la forme est
indéterminée et
reste indéterminée

$+\infty$

$-\infty$

4. Quelle est la limite de $x^3 \times e^{-x}$ (où e^{-x} désigne l'exponentielle de $-x$) quand x tend vers $+\infty$?

$-\infty$

$+\infty$

0

1

5. Quelle est la limite de $x \times e^x$ quand x tend vers $-\infty$?

1

$-\infty$

0

$+\infty$

ÉTAPE 9 · EXERCICE 1 (SUITE)

6. Une fonction f vérifie $f(x) \geq x^2 - 5$ pour tout $x \geq 3$. Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5 = +\infty$, que peut-on conclure sur la limite de f en $+\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

On ne peut rien conclure sans connaître l'expression exacte de f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

7. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. Quelle droite est asymptote à la courbe de f en $+\infty$?

La droite d'équation $x = 3$

La droite d'équation $y = 3$

La droite d'équation $y = 0$

Il n'y a pas d'asymptote, seulement en un point

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Quelle est la limite de $f(x) = (2x^2 + 1) / (x^2 + 3)$ quand x tend vers $+\infty$?

1. Je factorise le terme prépondérant x^2 au numérateur et au dénominateur.
2. $f(x) = (2 + 1/x^2) / (1 + 3/x^2)$
3. Quand x tend vers $+\infty$, $1/x^2$ et $3/x^2$ tendent vers 0 , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2/1 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \text{ en factorisant le terme prépondérant } x^2.$$

1. Quelle est la limite de $f(x) = -3x + 5$ quand x tend vers $-\infty$?

Résultat :

2. On définit $f(x) = 1 / (x - 2)$. Quelle droite est asymptote à la courbe de f , en lien avec le comportement de f en 2 ?

Résultat :

3. On définit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Sachant que $\sqrt{x^2 + 1}$ tend vers $+\infty$ et que $-x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, quelle est la limite de f en $+\infty$?

Résultat :

Compléments sur la dérivation

Une fonction composée se dérive en deux temps : la dérivée de l'extérieur, évaluée à l'intérieur, multipliée par la dérivée de l'intérieur.

Les mots à connaître

- **fonction composée** — La fonction $v \circ u$, définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$: on applique d'abord u , puis v au résultat.
- **dérivée seconde** — La dérivée de la fonction dérivée f' , notée f'' : elle mesure comment la pente de la courbe de f elle-même évolue.

Ce que je sais déjà

· Pour une composée $v \circ u$, dérivable, la relation du programme est $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

· La dérivée seconde f'' est la dérivée de la fonction dérivée f' — jamais le carré de f' , ni f composée avec elle-même.

· Pour $x \mapsto f(ax + b)$, la dérivée est $x \mapsto a \times f'(ax + b)$: cas particulier de la composée, avec $u(x) = ax + b$ et $u'(x) = a$.

La méthode

- 1 Je repère la composée $v \circ u$ dans f : quelle fonction est appliquée en dernier (v), quelle expression lui est passée ($u(x)$) ?
- 2 Je calcule v' et u' séparément.
- 3 J'applique la formule $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ — je n'évalue JAMAIS v' en x directement, toujours en $u(x)$.
- 4 Pour une dérivée seconde, je dérive une deuxième fois le résultat obtenu pour f' .
- 5 Je calcule la valeur numérique demandée en remplaçant x par sa valeur, en dernier.

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' ; f'' \text{ est la dérivée de } f' ; (x \mapsto f(ax + b))' : x \mapsto a \times f'(ax + b).$$

Un exemple entièrement calculé

Pour $f(x) = (2x + 1)^3$, avec $v(t) = t^3$ et $u(x) = 2x + 1$: $v'(t) = 3t^2$, $u'(x) = 2$.

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \times 2 = 6(2x + 1)^2.$$

$$f'(1) = 6 \times 3^2 = 54.$$

Attention au piège

Calculer $v'(x) \times u'(x)$ au lieu de $v'(u(x)) \times u'(x)$: la dérivée de la fonction v doit toujours être évaluée en $u(x)$, jamais en x directement.

Compléments sur la dérivation — entoure la bonne réponse

Rappel : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$; f'' est la dérivée de f' ; $(x \mapsto f(ax + b))' : x \mapsto a \times f'(ax + b)$.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

On définit $f(x) = (2x + 1)^3$, composée de $v(t) = t^3$ et $u(x) = 2x + 1$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 1 ?

$$f'(x) = 2(2x + 1)^2, \\ f'(1) = 18$$

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2, \\ f'(1) = 27$$

$$f'(x) = 6(2x + 1)^2, \\ f'(1) = 54$$

$$f'(x) = 6(2x + 1), f'(1) = 18$$

1. On définit $f(x) = e^{3x+2}$ (où e^{3x+2} désigne l'exponentielle de $3x + 2$), composée de $v(t) = e^t$ et $u(x) = 3x + 2$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 0 ?

$$f'(x) = e^{3x+2}, f'(0) = e^2$$

$$f'(x) = 3xe^{3x+2}, f'(0) = 0$$

$$f'(x) = 3e^{3x+2}, f'(0) = 3e^2$$

$$f'(x) = 2e^{3x+2}, f'(0) = 2e^2$$

2. On définit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, composée de $v(t) = \sqrt{t}$ et $u(x) = x^2 + 1$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 2 ?

$$f'(x) = 1 / (2\sqrt{x^2 + 1}), f'(2) = 1/(2\sqrt{5})$$

$$f'(x) = x, f'(2) = 2$$

$$f'(x) = x / \sqrt{x^2 + 1}, f'(2) = 2/\sqrt{5}$$

$$f'(x) = 2x / \sqrt{x^2 + 1}, f'(2) = 4/\sqrt{5}$$

3. On définit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Quelle est $f''(x)$ (la dérivée seconde de f), et combien vaut-elle en 2 ?

$$f''(x) = 6x, f''(2) = 12$$

$$f''(x) = 3x^2 - 6x, f''(2) = 0$$

$$f''(x) = 6, f''(2) = 6$$

$$f''(x) = 6x - 6, f''(2) = 6$$

4. Que désigne la dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable ?

Le carré de f'

f' composée avec elle-même

La fonction f évaluée deux fois

La dérivée de la fonction dérivée f'

ÉTAPE 10 · EXERCICE 1 (SUITE)

5. On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = f(3x - 1) = (3x - 1)^2$. Sachant que, pour $x \mapsto f(ax + b)$, la dérivée est $x \mapsto a \times f'(ax + b)$, quelle est $g'(x)$, et combien vaut-elle en 1 ?

$$g'(x) = 3(3x - 1), \\ g'(1) = 6$$

$$g'(x) = 2(3x - 1), \\ g'(1) = 4$$

$$g'(x) = 6(3x - 1), \\ g'(1) = 12$$

$$g'(x) = 9x, g'(1) = 9$$

6. On pose $g(x) = e^{-2x+5}$ (où e^{-2x+5} désigne l'exponentielle de $-2x + 5$). Quelle est $g'(x)$, et combien vaut-elle en 2,5 ?

$$g'(x) = e^{-2x+5}, g'(2,5) = 1$$

$$g'(x) = -2e^{-2x+5}, \\ g'(2,5) = -2$$

$$g'(x) = -2xe^{-2x+5}, \\ g'(2,5) = 0$$

$$g'(x) = 2e^{-2x+5}, \\ g'(2,5) = 2$$

7. On définit $f(x) = (x^2 + 1)^4$, composée de $v(t) = t^4$ et $u(x) = x^2 + 1$. Quelle est la valeur de $f'(1)$?

4

16

8

64

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

On définit $f(x) = (2x + 1)^3$, composée de $v(t) = t^3$ et $u(x) = 2x + 1$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 1 ?

1. Pour une composée $v \circ u$, la relation du programme donne $f' = (v' \circ u) \times u'$.
2. $v'(t) = 3t^2$, $u'(x) = 2$
3. $f'(x) = 3(2x + 1)^2 \times 2 = 6(2x + 1)^2$
4. $f'(1) = 6 \times (2 \times 1 + 1)^2 = 6 \times 9 = 54$

$$f'(x) = 6(2x + 1)^2, \text{ donc } f'(1) = 54.$$

1. On définit $f(x) = e^{3x+2}$ (où e^{3x+2} désigne l'exponentielle de $3x + 2$), composée de $v(t) = e^t$ et $u(x) = 3x + 2$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 0 ?

Résultat :

2. On définit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, composée de $v(t) = \sqrt{t}$ et $u(x) = x^2 + 1$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 2 ?

Résultat :

3. On définit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Quelle est $f''(x)$ (la dérivée seconde de f), et combien vaut-elle en 2 ?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 9 • Limites de fonctions

Rappel : Limite finie en l'infini $\rightarrow$ asymptote horizontale ; limite infinie en un point $\rightarrow$ asymptote verticale ; forme indéterminée $\rightarrow$ toujours transformer avant de conclure.



Scanne le code : la série « Limites de fonctions » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Limites de fonctions » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=limites-de-fonctions-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 10 • Compléments sur la dérivation

Rappel : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$; f'' est la dérivée de f' ; $(x \mapsto f(ax + b))' : x \mapsto a \times f'(ax + b)$.



Scanne le code : la série « Compléments sur la dérivation » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Compléments sur la dérivation » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=complements-derivation-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Convexité

Une courbe qui « creuse vers le haut » reste toujours au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses sécantes : c'est ça, la convexité.

Les mots à connaître

- **fonction convexe** — Une fonction dont la courbe, entre deux points quelconques, reste toujours en dessous du segment qui les joint (la sécante).
- **point d'inflexion** — Un point où la courbe change de convexité : f'' s'y annule EN CHANGEANT DE SIGNE.

Ce que je sais déjà

· f est convexe sur un intervalle si, pour tous points A et B de sa courbe, le segment [AB] reste au-dessus de la courbe.

· Pour une fonction deux fois dérivable, cette définition est équivalente à : la courbe est au-dessus de ses tangentes, ou f' est croissante, ou f'' est positive.

· En un point d'inflexion, f'' s'annule en changeant de signe : la courbe passe de concave à convexe, ou l'inverse.

La méthode

- 1 Je calcule f'' , la dérivée seconde de f .
- 2 J'étudie le signe de f'' (souvent à l'aide d'un tableau de signes).
- 3 Là où f'' est positive, f est convexe ; là où f'' est négative, f est concave.
- 4 Un point où f'' change de signe est un point d'inflexion.
- 5 Pour démontrer une inégalité, je compare la courbe de f à l'une de ses tangentes (au-dessus si f convexe) ou à une sécante (en dessous si f convexe).

$f'' \geq 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow f$ convexe sur cet intervalle $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow$ courbe au-dessus de ses tangentes.

Un exemple entièrement calculé

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, et sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$.
Comme la courbe reste au-dessus de cette tangente, on en déduit $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .

Attention au piège

Confondre convexité et sens de variation : une fonction peut être convexe et croissante, convexe et décroissante, concave et croissante, ou concave et décroissante — ce sont deux informations indépendantes, données respectivement par f' et f'' .

Convexité — entoure la bonne réponse

Rappel : $f'' \geq 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow f$ convexe sur cet intervalle $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow$ courbe au-dessus de ses tangentes.

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Une fonction f est convexe sur un intervalle si, pour tous points A et B de sa courbe représentative sur cet intervalle ?

La courbe est toujours en dessous de l'axe des abscisses

Le segment [AB] est toujours situé au-dessus de la courbe

f est croissante sur cet intervalle

Le segment [AB] est toujours situé en dessous de la courbe

1. On définit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$, de dérivée seconde $f''(x) = 12x^2 - 12$. Sur quel ensemble f est-elle convexe ?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''	+	+	0	-	0	+	+
Convexité	concave		ni l'un ni l'autre	concave		convexe	

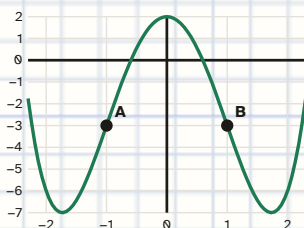
$\mathbb{R}$ tout entier

$[-1 ; 1[$

$] -\infty ; 1[$

$] -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

2. D'après la question précédente, $f''(x) = 12x^2 - 12$ s'annule et change de signe en $x = -1$ et en $x = 1$. Que sont les points A et B, d'abscisses -1 et 1 , sur la courbe de f ?



Des points où la tangente est verticale

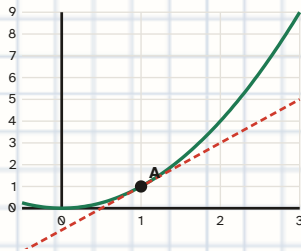
Des points d'inflexion

Des points où f n'est pas définie

Des extremums de f

ÉTAPE 11 • EXERCICE 1 (SUITE)

3. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (car $f''(x) = 2$ est toujours positive). Sa tangente en $x = 1$ a pour équation $y = 2x - 1$. La courbe de f est-elle au-dessus ou en dessous de cette tangente au point d'abscisse 2 ?



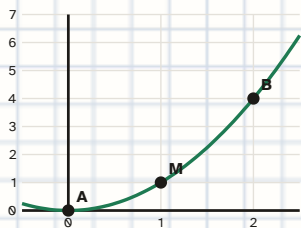
En dessous, car $f(2) = 4$ est inférieur à l'ordonnée 3 de la tangente en $x = 2$

Au-dessus, car $f(2) = 4$ est supérieur à l'ordonnée 3 de la tangente en $x = 2$

Confondue avec la tangente, car $f(2) = 3$

On ne peut pas savoir sans tracer la figure

4. On considère toujours $f(x) = x^2$, convexe sur $\mathbb{R}$, et les points $A(0 ; 0)$ et $B(2 ; 4)$ de sa courbe. Le point de la courbe d'abscisse 1 est-il au-dessus ou en dessous du segment $[AB]$?



On ne peut pas savoir sans connaître la pente de $[AB]$

Confondu avec le milieu de $[AB]$

Au-dessus, car $f(1) = 1$ est supérieur à l'ordonnée du milieu de $[AB]$

En dessous, car $f(1) = 1$ est inférieur à l'ordonnée du milieu de $[AB]$, qui vaut 2

ÉTAPE 11 • EXERCICE 1 (SUITE)

5. Sur un intervalle, la fonction dérivée f' d'une fonction f deux fois dérivable est croissante. Que peut-on en déduire sur la convexité de f sur cet intervalle ?

x	a	b
Variations de f'	croissante	

f est croissante sur cet intervalle

f est concave sur cet intervalle

f est convexe sur cet intervalle

On ne peut rien en déduire sur la convexité

6. Une fonction f est convexe ET croissante sur un intervalle. Que peut-on en déduire sur f' sur cet intervalle ?

On ne peut rien déduire de plus que « f croissante »

f' est positive (car f croissante) et croissante (car f convexe)

f' est négative et croissante

f' est positive et décroissante

7. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, et sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$. Quelle inégalité peut-on en déduire, valable pour tout réel x ?

$e^x = 1 + x$

$e^x \leq 1 + x$

$e^x \geq x$

$e^x \geq 1 + x$

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Une fonction f est convexe sur un intervalle si, pour tous points A et B de sa courbe représentative sur cet intervalle ?

1. La convexité se définit d'abord par la position de la courbe par rapport à ses SÉCANTES : pour une fonction convexe, chaque sécante reste au-dessus de la courbe.
2. Ni le signe de f , ni son sens de variation ne définissent la convexité : une fonction convexe peut très bien être décroissante, ou négative.

f est convexe sur un intervalle si, pour tous points A et B de sa courbe, le segment [AB] reste au-dessus de la courbe.

1. Une fonction f est convexe ET croissante sur un intervalle. Que peut-on en déduire sur f' sur cet intervalle ?

Résultat :

2. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, et sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$. Quelle inégalité peut-on en déduire, valable pour tout réel x ?

Résultat :

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Une courbe continue qui passe du négatif au positif traverse forcément l'axe des abscisses : c'est toute la puissance du théorème des valeurs intermédiaires.

Les mots à connaître

- **fonction continue en un point** — Une fonction f telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$: sa courbe ne présente pas de saut en a .
- **dichotomie** — Un algorithme qui coupe en deux, à chaque étape, l'intervalle contenant une solution — en gardant la moitié où le signe de f change.
- **point fixe** — Pour une fonction f , un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$: la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, si elle existe et que f est continue, est toujours un point fixe de f .

Ce que je sais déjà

- Toute fonction dérivable en un point y est continue — mais la réciproque est fausse (la valeur absolue est continue en 0 sans y être dérivable).
- Théorème des valeurs intermédiaires : si f est continue sur $[a ; b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a ; b[$.
- Si de plus f est strictement monotone sur $[a ; b]$, cette solution est UNIQUE.
- Si (u_n) converge vers ℓ et que f est continue en ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

La méthode

- 1 Je vérifie que f est bien continue sur l'intervalle étudié : c'est une hypothèse indispensable du théorème.
- 2 Je calcule $f(a)$ et $f(b)$, et je vérifie qu'ils sont de signes opposés (ou que k est compris entre les deux, pour une équation $f(x) = k$).
- 3 J'invoque le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'une solution dans $]a ; b[$.
- 4 Si f est en plus strictement monotone sur cet intervalle, j'ajoute que cette solution est unique.
- 5 Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge, sa limite ℓ vérifie l'équation du point fixe $\ell = f(\ell)$.

f continue sur $[a ; b]$, $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés $\Rightarrow f(x) = 0$ a une solution dans $]a ; b[$ (unique si f strictement monotone).

Un exemple entièrement calculé

Pour $f(x) = x^3 - 2x - 1$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 3$ sont de signes opposés.
 f est continue sur $[1 ; 2]$: il existe donc une solution de $f(x) = 0$ dans $]1 ; 2[$.

Attention au piège

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sans avoir vérifié la continuité de f sur l'intervalle : sans cette hypothèse, un simple changement de signe ne garantit rien.

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires — entoure la bonne réponse

Rappel : f continue sur $[a ; b]$, $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés $\Rightarrow f(x) = 0$ a une solution dans $]a ; b[$ (unique si f strictement monotone).

Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Comment définit-on le fait qu'une fonction f soit continue en un réel a ?

f est dérivable en a

La courbe de f ne passe pas par a

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$f(a)$ existe

1. La fonction valeur absolue est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

Continue et dérivable en 0

Dérivable en 0 , mais pas continue en 0

Ni continue ni dérivable en 0

Continue en 0 , mais pas dérivable en 0

2. Une suite vérifie $u_n = 1 + 1/n$ pour $n \geq 1$, et converge vers 1. On définit la fonction continue $f(x) = x^2 + 3$. Quelle est la limite de la suite $(f(u_n))$ quand n tend vers $+\infty$?

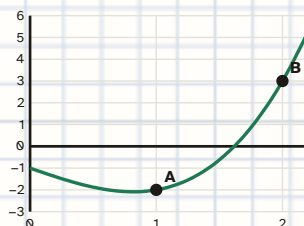
3

4

1

$+\infty$

3. On définit $f(x) = x^3 - 2x - 1$, continue sur $[1 ; 2]$. On calcule $f(1) = -2$ et $f(2) = 3$. Que garantit le théorème des valeurs intermédiaires pour l'équation $f(x) = 0$?



Il n'existe aucune solution dans $[1 ; 2]$

Il existe au moins une solution dans $]1 ; 2[$

Il existe exactement deux solutions dans $]1 ; 2[$

$f(x) = 0$ n'a de solution qu'en dehors de $[1 ; 2]$

ÉTAPE 12 • EXERCICE 1 (SUITE)

4. On sait que f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 2]$, avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 10$. Combien l'équation $f(x) = 5$ admet-elle de solutions dans $[0 ; 2]$?

Une infinité

Exactement une, car f est continue et strictement monotone

Au moins une, mais peut-être plusieurs

Aucune, car 5 n'est pas une valeur de f

5. Pour $f(x) = x^3 - 2x - 1$, on sait que $f(1)$ est négatif et $f(2)$ est positif. Un algorithme de dichotomie calcule le milieu 1,5 de $[1 ; 2]$: $f(1,5) = 1,5^3 - 2 \times 1,5 - 1 = -0,625$. Dans quel intervalle se trouve alors la solution ?

$[1 ; 1,5]$

$[1,5 ; 2]$

$[1 ; 2]$

$[0 ; 1,5]$

6. On admet que la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n + 6) / 2$ converge vers un réel ℓ , et que la fonction $f(x) = (x + 6) / 2$ est continue. Quelle équation vérifie ℓ , et quelle est sa valeur ?

$\ell = 6/2$, donc $\ell = 3$

$\ell = (\ell + 6) / 2$, donc $\ell = 6$

$\ell = 0$, la valeur de u_0

$\ell = \ell + 6$, donc $\ell = -6$

7. Un élève applique le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction f définie sur $[a ; b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés, MAIS sans vérifier que f est continue sur $[a ; b]$. Le résultat du théorème est-il garanti ?

Non, la continuité sur l'intervalle est une hypothèse indispensable du théorème

Oui, le changement de signe suffit toujours à lui seul

Oui, à condition que f soit définie en tout point de $[a ; b]$

Non, il faut en plus que f soit dérivable

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Comment définit-on le fait qu'une fonction f soit continue en un réel a ?

1. La continuité en un point se définit par les limites : la limite de f en a doit exister ET être égale à la valeur de f en a .
2. $f(a)$ peut exister sans que f soit continue en a : encore faut-il que la limite de f en a existe et coïncide avec $f(a)$.

f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

1. La fonction valeur absolue est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

Résultat :

2. Une suite vérifie $u_n = 1 + 1/n$ pour $n \geq 1$, et converge vers 1. On définit la fonction continue $f(x) = x^2 + 3$. Quelle est la limite de la suite $(f(u_n))$ quand n tend vers $+\infty$?

Résultat :

3. On sait que f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 2]$, avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 10$. Combien l'équation $f(x) = 5$ admet-elle de solutions dans $[0 ; 2]$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 11 • Convexité

Rappel : $f'' \geq 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow f$ convexe sur cet intervalle $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow$ courbe au-dessus de ses tangentes.



Scanne le code : la série « Convexité » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Convexité » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=t1e&s=convexite-t1e

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 12 • Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Rappel : f continue sur $[a ; b]$, $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés $\Rightarrow f(x) = 0$ a une solution dans $]a ; b[$ (unique si f strictement monotone).



Scanne le code : la série « Continuité et théorème des valeurs intermédiaires » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Continuité et théorème des valeurs intermédiaires » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=t1e&s=continuited-tvi-t1e

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Logarithme népérien : réciproque et propriétés

Le logarithme népérien défait ce que l'exponentielle a fait : deux fonctions réciproques, et toute une algèbre pour transformer une écriture.

Les mots à connaître

- **fonction réciproque** — Une fonction qui « défait » exactement ce qu'une autre a fait : $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x , et $e^{\ln(x)} = x$ pour tout réel x strictement positif.
- **équation fonctionnelle** — Une propriété qui transforme une opération (produit, quotient, puissance) en une autre (somme, différence, produit par un entier) : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, par exemple.

Ce que je sais déjà

- $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$ uniquement, comme réciproque de l'exponentielle : $\ln(x) = y$ équivaut à $e^y = x$.
- $\ln(1) = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln(e) = 1$ (car $e^1 = e$).
- Propriétés algébriques : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$; $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$.
- Il n'existe AUCUNE règle pour $\ln(a + b)$: le logarithme ne transforme jamais une somme.

La méthode

- 1 Je repère l'opération présente dans l'expression : produit, quotient, puissance, ou composition avec exp.
- 2 Pour un produit, j'utilise $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; pour un quotient, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$; pour une puissance, $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$.
- 3 Pour résoudre une équation $\ln(x) = k$, j'applique l'exponentielle aux deux membres : $x = e^k$.
- 4 Pour résoudre une équation $e^x = k$ (k strictement positif), j'applique $\ln$ aux deux membres : $x = \ln(k)$.
- 5 Pour une inéquation avec $\ln$, je vérifie D'ABORD le domaine de définition (l'argument de $\ln$ doit être strictement positif) avant de résoudre.

$\ln$ et exp sont réciproques ; $\ln$ transforme un produit en somme, un quotient en différence, une puissance en produit par un entier — jamais une somme.

Un exemple entièrement calculé

Résoudre $\ln(2x - 1) \leq 0$: le domaine impose $2x - 1 > 0$, soit $x > 1/2$.

$\ln(2x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1/2 < x \leq 1$.

L'ensemble des solutions est $]1/2 ; 1]$.

Attention au piège

Écrire $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$: cette règle n'existe que pour un PRODUIT ($\ln(ab)$), jamais pour une somme. Vérifier : $\ln(9) \approx 2,197$ est différent de $\ln(4) + \ln(5) \approx 2,996$.

Logarithme népérien : réciproque et propriétés — entoure la bonne réponse

Rappel : $\ln$ et $\exp$ sont réciproques ; $\ln$ transforme un produit en somme, un quotient en différence, une puissance en produit par un entier — jamais une somme.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

La fonction $\ln(x)$ (logarithme népérien) est définie comme la réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Quel est $\ln(1)$?

0

-1

Elle n'est pas définie
en 1

1

1. Quelle est la valeur de $\ln(e^4)$ (où e^4 désigne l'exponentielle de 4) ?

4

0

e^4

$1/4$

2. Quelle est la solution de l'équation $e^x = 12$ (avec e^x l'exponentielle de x) ?

$\ln(12)$

e^{12}

12

$1/12$

3. Karim affirme que $\ln(4 + 5)$ est égal à $\ln(4) + \ln(5)$. A-t-il raison ?

Oui, $\ln$ transforme
toujours une somme
en somme

Non : $\ln(a + b)$ n'est
JAMAIS égal à $\ln(a)$
+ $\ln(b)$ en général

On ne peut pas
savoir sans
calculatrice

Oui, car $4 + 5 = 9$ et
 $\ln(9)$ se décompose
ainsi

4. Sachant que $\ln(3)$ et $\ln(4)$ désignent les logarithmes népériens de 3 et 4, comment écrire $\ln(12)$ à l'aide de ces deux nombres ?

$\ln(3) - \ln(4)$

$\ln(3) + \ln(4)$

$\ln(3) \times \ln(4)$

$\ln(4) - \ln(3)$

5. Sachant que $\ln(7)$ et $\ln(3)$ désignent les logarithmes népériens de 7 et 3, comment écrire $\ln(7/3)$ à l'aide de ces deux nombres ?

$\ln(7) / \ln(3)$

$\ln(7) + \ln(3)$

$\ln(3) - \ln(7)$

$\ln(7) - \ln(3)$

ÉTAPE 13 · EXERCICE 1 (SUITE)

6. Quelle est la solution de l'équation $\ln(x) = 2$ (avec x strictement positif) ?

$1/2$

e^2

$\ln(2)$

2

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(2x - 1) \leq 0$?

$]1/2 ; 1]$

$[0 ; 1]$

$]1/2 ; +\infty[$

$] -\infty ; 1]$

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

La fonction $\ln(x)$ (logarithme népérien) est définie comme la réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Quel est $\ln(1)$?

1. Par définition, $\ln(x) = y$ équivaut à $e^y = x$, pour x strictement positif.
2. $e^0 = 1$
3. Donc $\ln(1) = 0$, puisque $e^0 = 1$.

$\ln(1) = 0$, car $e^0 = 1$ et $\ln$ est la réciproque de l'exponentielle.

1. Quelle est la valeur de $\ln(e^4)$ (où e^4 désigne l'exponentielle de 4) ?

Résultat :

2. Quelle est la solution de l'équation $e^x = 12$ (avec e^x l'exponentielle de x) ?

Résultat :

3. Karim affirme que $\ln(4 + 5)$ est égal à $\ln(4) + \ln(5)$. A-t-il raison ?

Résultat :

Étude de la fonction logarithme

ln grandit sans fin, mais de plus en plus lentement : sa dérivée, ses limites et la croissance comparée racontent toute son histoire.

Les mots à connaître

- **croissance comparée** — Un résultat qui compare la « vitesse » de deux fonctions qui tendent toutes deux vers l'infini ou vers zéro : en $+\infty$, x l'emporte toujours sur $\ln(x)$; en 0 , x écrase la divergence de $\ln(x)$ vers $-\infty$.

Ce que je sais déjà

- La dérivée de $\ln$ est $\ln'(x) = 1/x$ sur $]0 ; +\infty[$.
- Comme $1/x$ est toujours strictement positive, $\ln$ est strictement croissante sur tout son ensemble de définition.
- Limites de référence : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.
- Pour une composée $\ln(u)$, la dérivée est u'/u — jamais u' seule.

La méthode

- 1 Pour une limite de référence (en 0 ou en $+\infty$), je cite directement le résultat du cours.
- 2 Pour une croissance comparée, je reconnais la forme $\ln(x)/x$ (en $+\infty$) ou $x \ln(x)$ (en 0), toutes deux de limite 0 .
- 3 Pour dériver $\ln(u)$, je repère $u(x)$ à l'intérieur du logarithme, je calcule $u'(x)$, et j'applique $(\ln(u))' = u'/u$.
- 4 Je n'oublie JAMAIS de diviser par u : dériver $\ln(u)$ et obtenir seulement u' est une erreur fréquente.

$\ln'(x) = 1/x$, strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$; limites $-\infty$ en 0 , $+\infty$ en $+\infty$; croissance comparée : $\ln(x)/x \rightarrow 0$ et $x \ln(x) \rightarrow 0$; $(\ln(u))' = u'/u$.

Un exemple entièrement calculé

Pour $f(x) = \ln(3x + 2)$, composée de $\ln$ et $u(x) = 3x + 2$ (donc $u'(x) = 3$).

$$f'(x) = 3/(3x + 2).$$

$$f'(1) = 3/(3 \times 1 + 2) = 3/5.$$

Attention au piège

Dériver $\ln(u)$ et écrire seulement u' , en oubliant la division par u : la formule correcte est TOUJOURS u'/u , jamais u' seule.

Étude de la fonction logarithme – entoure la bonne réponse

Rappel : $\ln'(x) = 1/x$, strictement croissante sur $]0; +\infty[$; limites $-\infty$ en 0 , $+\infty$ en $+\infty$; croissance comparée : $\ln(x)/x \rightarrow 0$ et $x \ln(x) \rightarrow 0$; $(\ln(u))' = u'/u$.

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Quelle est la fonction dérivée de $\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$?

$-1/x$

x^2

x

$1/x$

1. Quel est le sens de variation de $\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$?

x	0	$+\infty$
1/x	+	
Variations de	croissante	

Strictement croissante, car sa dérivée $1/x$ est strictement positive

Constante

Strictement décroissante, car sa dérivée $1/x$ est strictement négative

Ni croissante ni décroissante

2. Quelle est la limite de $\ln(x)$ quand x tend vers 0 , avec x strictement positif ?

Elle n'existe pas

$-\infty$

$+\infty$

0

3. Quelle est la limite de $\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

1

$-\infty$

$+\infty$

0

4. Quelle est la limite de $\ln(x) / x$ quand x tend vers $+\infty$?

1

$-\infty$

$+\infty$

0

ÉTAPE 14 • EXERCICE 1 (SUITE)

5. Quelle est la limite de $x \ln(x)$ quand x tend vers 0 , avec x strictement positif ?

$+\infty$

1

$-\infty$

0

6. On définit $f(x) = \ln(3x + 2)$, composée de $\ln(t)$ et $u(x) = 3x + 2$. Quelle est $f'(x)$, et combien vaut-elle en 1 ?

$f'(x) = 3, f'(1) = 3$

$f'(x) = 3/(3x + 2),$
 $f'(1) = 3/5$

$f'(x) = 1/(3x + 2),$
 $f'(1) = 1/5$

$f'(x) = 3x + 2, f'(1) =$
5

7. Un élève dérive $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ et trouve $f'(x) = 2x$, en oubliant de diviser. Quelle est la bonne valeur de $f'(2)$?

$f'(x) = 2x/(x^2 + 1) ;$
 $f'(2) = 4/5$

$f'(x) = 1/(2x) ; f'(2) =$
 $1/4$

$f'(x) = (x^2 + 1) \times 2x ;$
 $f'(2) = 20$

$f'(2) = 4$, la formule
de l'élève est
correcte

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Quelle est la fonction dérivée de $\ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$?1. La fonction dérivée du logarithme népérien est une formule à connaître par cœur : $\ln'(x) = 1/x$.

$$\ln'(x) = 1/x \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

1. Quelle est la limite de $\ln(x)$ quand x tend vers 0, avec x strictement positif ?

Résultat :

2. Quelle est la limite de $\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

Résultat :

3. Quelle est la limite de $\ln(x) / x$ quand x tend vers $+\infty$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 13 • Logarithme népérien : réciproque et propriétés

Rappel : $\ln$ et $\exp$ sont réciproques ; $\ln$ transforme un produit en somme, un quotient en différence, une puissance en produit par un entier — jamais une somme.



Scanne le code : la série « Logarithme népérien : réciproque et propriétés » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Logarithme népérien : réciproque et propriétés » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=logarithme-proprietes-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 14 • Étude de la fonction logarithme

Rappel : $\ln'(x) = 1/x$, strictement croissante sur $]0; +\infty[$; limites $-\infty$ en 0 , $+\infty$ en $+\infty$; croissance comparée : $\ln(x)/x \rightarrow 0$ et $x \ln(x) \rightarrow 0$; $(\ln(u))' = u'/u$.



Scanne le code : la série « Étude de la fonction logarithme » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Étude de la fonction logarithme » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=logarithme-etude-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Fonctions sinus et cosinus

sin et cos se dérivent l'une dans l'autre, se répètent tous les 2π , et suffisent à résoudre des problèmes d'optimisation géométrique.

Les mots à connaître

- **fonction paire** — Une fonction f telle que $f(-x) = f(x)$ pour tout réel x : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. C'est le cas de cos.
- **fonction impaire** — Une fonction f telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. C'est le cas de sin.
- **périodique** — Une fonction qui reprend exactement les mêmes valeurs à intervalles réguliers : sin et cos sont périodiques de période 2π .

Ce que je sais déjà

· Dérivées : $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$ (avec le signe moins pour cos).

· cos est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$), sin est impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$) ; toutes deux sont périodiques de période 2π .

· Sur $[0 ; \pi]$, cos est décroissante (sa dérivée $-\sin(x)$ y est négative ou nulle).

· L'équation $\cos(x) = a$ (pour $-1 < a < 1$) a exactement deux solutions opposées sur $[-\pi ; \pi]$.

La méthode

- 1 Pour une dérivée, j'applique directement $\sin' = \cos$ ou $\cos' = -\sin$ (en n'oubliant jamais le signe moins pour cos).
- 2 Pour résoudre $\cos(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$, je reconnais une valeur remarquable ou j'utilise le cercle trigonométrique : les deux solutions sont opposées.
- 3 Pour une inéquation $\cos(x) \leq a$, je m'appuie sur les solutions de l'égalité et sur le sens de variation de cos pour délimiter les intervalles.
- 4 Pour un problème d'optimisation, j'exprime la quantité à optimiser en fonction d'un angle, je dérive, et j'étudie le signe de la dérivée pour trouver le maximum ou le minimum.

$\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$; $\cos(x) = a$ ($-1 < a < 1$) a deux solutions opposées sur $[-\pi ; \pi]$; un problème trigonométrique se résout comme toute étude de fonction : dérivée, signe, variations.

Un exemple entièrement calculé

Un rectangle est inscrit dans un demi-cercle de rayon 1, d'aire $A(\theta) = \sin(2\theta)$, pour θ dans $]0 ; \pi/2[$.

$A(\theta)$ est maximale quand $\sin(2\theta) = 1$, soit $2\theta = \pi/2$, donc $\theta = \pi/4$.

L'aire maximale vaut alors $A(\pi/4) = \sin(\pi/2) = 1$.

Attention au piège

Oublier le signe moins dans la dérivée de cos (écrire $\cos' = \sin$ au lieu de $\cos' = -\sin$) : c'est l'erreur la plus fréquente sur les fonctions trigonométriques.

Fonctions sinus et cosinus – entoure la bonne réponse

Rappel : $\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$; $\cos(x) = a$ ($-1 < a < 1$) a deux solutions opposées sur $[-\pi ; \pi]$; un problème trigonométrique se résout comme toute étude de fonction : dérivée, signe, variations.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Quelle est la fonction dérivée de $\sin$ sur $\mathbb{R}$?

–cos

–sin

cos

sin

1. Quelle est la fonction dérivée de $\cos$ sur $\mathbb{R}$?

cos

–cos

–sin

sin

2. La fonction $\cos$ est-elle paire ou impaire sur $\mathbb{R}$?

Ni paire ni impaire

Paire, car $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout réel x

Paire seulement sur $[0 ; \pi]$

Impaire, car $\cos(-x) = -\cos(x)$ pour tout réel x

3. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période 2π . Que peut-on en déduire sur $\sin(x + 2\pi)$?

$\sin(x + 2\pi)$ dépend de x et ne se simplifie pas

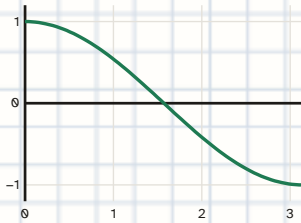
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ pour tout réel x

$\sin(x + 2\pi) = -\sin(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) + 2\pi$

ÉTAPE 15 • EXERCICE 1 (SUITE)

4. Sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ est négative ou nulle. Quel est le sens de variation de $\cos$ sur cet intervalle ?



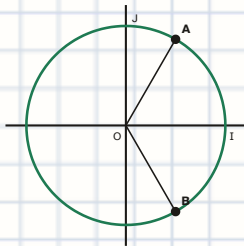
**cos est décroissante
sur $[0 ; \pi]$**

**cos change deux
fois de sens de
variation sur $[0 ; \pi]$**

**cos est constante
sur $[0 ; \pi]$**

**cos est croissante
sur $[0 ; \pi]$**

5. Résoudre $\cos(x) = 1/2$ sur $[-\pi ; \pi]$?



$x = \pi/6$ ou $x = -\pi/6$

$x = \pi/3$ seulement

$x = 2\pi/3$ ou $x = -2\pi/3$

$x = \pi/3$ ou $x = -\pi/3$

6. D'après la question précédente, $\cos(x) = 1/2$ pour $x = \pi/3$ et $x = -\pi/3$ sur $[-\pi ; \pi]$. Résoudre l'inéquation $\cos(x) \leq 1/2$ sur ce même intervalle ?

$[\pi/3 ; \pi]$

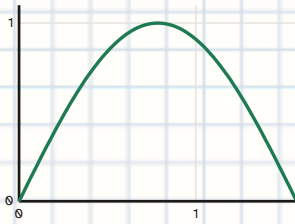
$[-\pi ; -\pi/3] \cup [\pi/3 ; \pi]$

$[-\pi/3 ; \pi/3]$

$[-\pi ; \pi]$

ÉTAPE 15 • EXERCICE 1 (SUITE)

7. Un rectangle est inscrit dans un demi-cercle de rayon 1, ses sommets supérieurs faisant un angle θ avec le centre (θ dans $]0 ; \pi/2[$). Son aire vaut $A(\theta) = \sin(2\theta)$. Pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale, et que vaut-elle alors ?



$\theta = \pi/2$, aire
maximale égale à 1

$\theta = \pi/4$, aire
maximale égale à 1

$\theta = \pi/3$, aire
maximale égale à
 $\sqrt{3}/2$

$\theta = \pi/6$, aire
maximale égale à
 $1/2$

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Quelle est la fonction dérivée de $\sin$ sur $\mathbb{R}$?

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. C'est une formule du programme à connaître par cœur.

La fonction dérivée de $\sin$ est $\cos$.

1. Quelle est la fonction dérivée de $\cos$ sur $\mathbb{R}$?

Résultat :

2. La fonction $\cos$ est-elle paire ou impaire sur $\mathbb{R}$?

Résultat :

3. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période 2π . Que peut-on en déduire sur $\sin(x + 2\pi)$?

Résultat :

Primitives

Chercher une primitive, c'est lire le tableau des dérivées à l'envers — avec une infinité de réponses possibles, à une constante près.

Les mots à connaître

- **primitive** — Une fonction F telle que $F' = f$ sur un intervalle : trouver une primitive, c'est « remonter » depuis une dérivée.
- **constante d'intégration** — Le réel k tel que, si F est une primitive de f , alors $F + k$ en est une autre : deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent toujours d'une constante.

Ce que je sais déjà

• F est une primitive de f sur un intervalle I si $F' = f$ sur I .

• Primitives de référence : x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$) a pour primitive $x^{n+1}/(n+1)$; $1/\sqrt{x}$ a pour primitive $2\sqrt{x}$; $\exp$ a pour primitive $\exp$; $\sin$ a pour primitive $-\cos$; $\cos$ a pour primitive $\sin$.

• Pour $f = u' \times u^n$, une primitive est $u^{n+1}/(n+1)$ (forme $(v' \circ u) \times u'$, avec $v(t) = t^{n+1}/(n+1)$).

• Une fonction continue sur un intervalle a une INFINITÉ de primitives, qui diffèrent toutes d'une constante.

La méthode

- 1 Je reconnais la forme de f : fonction de référence directe, ou forme composée $u' \times$ (quelque chose de u).
- 2 Pour une fonction de référence, j'applique directement la primitive du tableau.
- 3 Pour une forme composée, j'identifie $u(x)$ et je vérifie que $u'(x)$ apparaît bien en facteur.
- 4 Je calcule la primitive de la fonction extérieure appliquée à u , et je vérifie en dérivant le résultat.
- 5 Je n'oublie jamais que la primitive trouvée n'est qu'UNE primitive parmi une infinité : la forme générale s'écrit $F(x) + k$.

F est une primitive de f si $F' = f$; primitive de $u' \times u^n$: $u^{n+1}/(n+1)$; deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Un exemple entièrement calculé

Pour $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$, je reconnais $u(x) = x^2 + 1$ (donc $u'(x) = 2x$) et $n = 3$.

Une primitive est $F(x) = (x^2 + 1)^4/4$.

Vérification : $F'(x) = 4(x^2 + 1)^3 \times 2x / 4 = 2x(x^2 + 1)^3 = f(x)$.

Attention au piège

Oublier la constante d'intégration, ou confondre primitive et dérivée : dériver x^3 donne $3x^2$, mais chercher une primitive de $3x^2$ redonne x^3 (+ une constante), pas $6x$.

Primitives — entoure la bonne réponse

Rappel : F est une primitive de f si $F' = f$; primitive de $u' \times u^n$: $u^{n+1}/(n+1)$; deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

On définit $f(x) = 2x$. Laquelle de ces fonctions est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

$$F(x) = x^3$$

$$F(x) = 2$$

$$F(x) = x^2 + 3$$

$$F(x) = x^2 - x$$

1. Quelle est une primitive de $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$?

$$F(x) = 3x^2$$

$$F(x) = x^4/4$$

$$F(x) = x^4$$

$$F(x) = 4x^3$$

2. Quelle est une primitive de $f(x) = 1/x^2$ (soit x^{-2}) sur $]0; +\infty[$?

$$F(x) = 1/x$$

$$F(x) = -1/(2x^2)$$

$$F(x) = -2/x^3$$

$$F(x) = -1/x$$

3. Quelle est une primitive de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$?

$$F(x) = \sqrt{x}/2$$

$$F(x) = \sqrt{x}$$

$$F(x) = 1/(2\sqrt{x})$$

$$F(x) = 2\sqrt{x}$$

4. Quelle est une primitive de $f(x) = e^{2x}$ (où e^{2x} désigne l'exponentielle de $2x$) sur $\mathbb{R}$?

$$F(x) = e^{2x}$$

$$F(x) = (1/2)e^{2x}$$

$$F(x) = 2e^{2x}$$

$$F(x) = (1/2)xe^{2x}$$

5. Quelle est une primitive de $f(x) = \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$?

$$F(x) = \cos(3x)$$

$$F(x) = -3\cos(3x)$$

$$F(x) = -(1/3)\cos(3x)$$

$$F(x) = (1/3)\cos(3x)$$

6. On définit $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$, de la forme $u' \times u^n$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $n = 3$. Quelle est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

$$F(x) = (x^2 + 1)^3/3$$

$$F(x) = (x^2 + 1)^4$$

$$F(x) = (x^2 + 1)^4/4$$

$$F(x) = 4(x^2 + 1)^3$$

ÉTAPE 16 · EXERCICE 1 (SUITE)

7. Une primitive de $f(x) = 3x^2$ est $F(x) = x^3$. Léa affirme que c'est la SEULE primitive de f sur $\mathbb{R}$. A-t-elle raison ?

Oui, car $(x^3)' = 3x^2$
est la seule dérivée
possible

Non, seule $F(x) = x^3$
+ 1 est une primitive

Oui, une fonction n'a
jamais qu'une seule
primitive

Non : $F(x) = x^3 + k$
est une primitive de
 f , quelle que soit la
constante réelle k

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

On définit $f(x) = 2x$. Laquelle de ces fonctions est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

1. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si $F' = f$ sur $\mathbb{R}$.
2. $(x^2 + 3)' = 2x$
3. $F(x) = x^2 + 3$ vérifie bien $F' = f$.

$F(x) = x^2 + 3$ est une primitive de $f(x) = 2x$, car sa dérivée vaut $2x$.

1. Quelle est une primitive de $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$?

Résultat :

2. Quelle est une primitive de $f(x) = 1/x^2$ (soit x^{-2}) sur $]0 ; +\infty[$?

Résultat :

3. Quelle est une primitive de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 15 • Fonctions sinus et cosinus

Rappel : $\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$; $\cos(x) = a$ ($-1 < a < 1$) a deux solutions opposées sur $[-\pi ; \pi]$; un problème trigonométrique se résout comme toute étude de fonction : dérivée, signe, variations.



Scanne le code : la série « Fonctions sinus et cosinus » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Fonctions sinus et cosinus » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=sinus-cosinus-fonctions-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 16 • Primitives

Rappel : F est une primitive de f si $F' = f$; primitive de $u' \times u^n$: $u^{n+1}/(n+1)$; deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.



Scanne le code : la série « Primitives » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Primitives » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=primitives-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Équations différentielles

Une équation dont l'inconnue est une fonction : la clé est toujours la même, une solution particulière plus la solution générale de l'équation sans second membre.

Les mots à connaître

- **équation différentielle** — Une équation dont l'inconnue est une fonction y , reliée à sa propre dérivée y' .
- **solution particulière** — UNE fonction qui vérifie l'équation différentielle, choisie ou trouvée par un moyen simple (souvent une fonction constante).
- **condition initiale** — Une valeur imposée à la solution en un point donné (par exemple $y(0)$), qui permet de déterminer la constante C et donc UNE solution unique parmi toutes les solutions générales.

Ce que je sais déjà

· Les solutions de $y' = ay$ sont exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

· Pour $y' = ay + b$ ($a \neq 0$), je cherche d'abord une solution particulière CONSTANTE $y = k$, en résolvant $0 = ak + b$.

· La solution générale de $y' = ay + b$ est alors la somme de cette solution particulière et de la solution générale de $y' = ay$: $y = Ce^{ax} + k$.

· Pour $y' = ay + f$ (f non constante), si une solution particulière est donnée, la solution générale s'obtient en lui ajoutant la solution générale de $y' = ay$.

· Une condition initiale (comme $y(0) = \text{valeur donnée}$) permet de calculer la valeur exacte de C .

La méthode

- 1 Je reconnais la forme de l'équation : $y' = ay$ (sans second membre) ou $y' = ay + b$ ou $y' = ay + f$ (avec second membre).
- 2 Pour $y' = ay$, la solution générale est directement $y = Ce^{ax}$.
- 3 Pour $y' = ay + b$, je cherche d'abord la solution particulière constante k , en résolvant $0 = ak + b$, PUIS j'écris la solution générale $y = Ce^{ax} + k$.
- 4 Pour $y' = ay + f$, si une solution particulière y_p est donnée, la solution générale est $y = Ce^{ax} + y_p$.
- 5 Si une condition initiale est donnée, je remplace x et y par les valeurs connues pour calculer C .

$y' = ay$: solutions $y = Ce^{ax}$. $y' = ay + b$: solutions $y = Ce^{ax} + k$, où k est la solution particulière constante. $y' = ay + f$: solutions $y = Ce^{ax} + y_p$, où y_p est une solution particulière donnée.

Équations différentielles — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Pour $y' = 2y + 6$, la solution particulière constante vérifie $0 = 2k + 6$, donc $k = -3$.

La solution générale est $y = Ce^{2x} - 3$.

Si $y(0) = 1$: $C - 3 = 1$, donc $C = 4$, et la solution est $y = 4e^{2x} - 3$.

Attention au piège

Oublier la solution particulière pour $y' = ay + b$ ($b \neq 0$) et écrire directement $y = Ce^{ax}$, comme si le second membre b n'existait pas : la solution générale correcte est TOUJOURS $y = Ce^{ax} + k$.

Équations différentielles — entoure la bonne réponse

Rappel : $y' = ay$: solutions $y = Ce^{ax}$. $y' = ay + b$: solutions $y = Ce^{ax} + k$, où k est la solution particulière constante. $y' = ay + f$: solutions $y = Ce^{ax} + y_p$, où y_p est une solution particulière donnée.

 Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Quelle est la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sur $\mathbb{R}$?

$y = 3e^x$

$y = 3x + C$

$y = Ce^x + 3$

$y = Ce^{3x}$, où C est une constante réelle

1. Les solutions de $y' = -2y$ sont les fonctions $y = Ce^{-2x}$. Sachant que $y(0) = 5$, quelle est la valeur de C , et quelle est la solution ?

$C = 0$, solution $y = e^{-2x}$

$C = 5$, solution $y = 5e^{-2x}$

$C = -2$, solution $y = -2e^{2x}$

$C = 5$, solution $y = e^{2x}$

2. Pour l'équation différentielle $y' = 2y + 6$, on cherche une solution particulière CONSTANTE $y = k$. Quelle est la valeur de k ?

-6

-3

6

3

3. D'après la question précédente, $y = -3$ est une solution particulière de $y' = 2y + 6$. Sachant que la solution générale de $y' = 2y$ est $y = Ce^{2x}$, et que $y(0) = 1$, quelle est la solution de $y' = 2y + 6$ vérifiant cette condition initiale ?

$y = 1e^{2x} - 3$

$y = 4e^{2x} - 3$

$y = 4e^{2x} + 3$

$y = Ce^{2x} - 3$

4. Un élève résout $y' = 2y + 6$ et écrit directement $y = Ce^{2x}$, comme pour $y' = 2y$, en oubliant le second membre
6. Cette solution est-elle correcte ?

Oui, le second membre 6 ne change rien à la solution

Non : il manque la solution particulière constante ; la bonne solution générale est $y = Ce^{2x} - 3$

Non, car il faudrait écrire $y = Ce^{2x} + 6$

Oui, à condition de choisir $C = 6$

ÉTAPE 17 · EXERCICE 1 (SUITE)

5. La fonction $y = 3e^{2x}$ est-elle solution de l'équation différentielle $y' = 2y$?

Oui, car $y' = 2y$ pour cette fonction

Non, il manque une constante additive

Oui, mais seulement en $x = 0$

Non, car y' n'est pas proportionnelle à y

6. Pour l'équation différentielle $y' = -y + 4$, la solution particulière constante est $y = 4$, et $y(0) = 0$. Quelle est la solution ?

$$y = -4e^{-x} + 4$$

$$y = 4e^{-x} + 4$$

$$y = -4e^x + 4$$

$$y = 4e^{-x} - 4$$

7. On donne que $y = x$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = y + (1 - x)$. Sachant que la solution générale de $y' = y$ est $y = Ce^x$, quelle est la solution générale de $y' = y + (1 - x)$?

$$y = Ce^x + 1 - x$$

$$y = Ce^x$$

$$y = Ce^x - x$$

$$y = Ce^x + x$$

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Quelle est la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sur $\mathbb{R}$?

1. Les solutions de $y' = ay$ sont exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.
2. Ici $a = 3$.

Les solutions de $y' = 3y$ sont les fonctions $y = Ce^{3x}$, C réel quelconque.

1. Les solutions de $y' = -2y$ sont les fonctions $y = Ce^{-2x}$. Sachant que $y(0) = 5$, quelle est la valeur de C , et quelle est la solution ?

Résultat :

2. Pour l'équation différentielle $y' = 2y + 6$, on cherche une solution particulière CONSTANTE $y = k$. Quelle est la valeur de k ?

Résultat :

3. D'après la question précédente, $y = -3$ est une solution particulière de $y' = 2y + 6$. Sachant que la solution générale de $y' = 2y$ est $y = Ce^{2x}$, et que $y(0) = 1$, quelle est la solution de $y' = 2y + 6$ vérifiant cette condition initiale ?

Résultat :

Calcul intégral

Une intégrale, c'est d'abord une aire sous une courbe — et une primitive suffit pour la calculer exactement, sans découper en rectangles.

Les mots à connaître

- **relation de Chasles** — Pour découper une intégrale en deux morceaux : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- **valeur moyenne** — La hauteur du rectangle de même aire que la fonction sur $[a ; b]$: $(1/(b - a)) \times \int_a^b f(x) dx$.
- **intégration par parties** — Une technique qui transforme $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ en $[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$, utile quand cette seconde intégrale est plus simple.

Ce que je sais déjà

- Pour f continue positive sur $[a ; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire sous la courbe de f , et vaut $F(b) - F(a)$ pour toute primitive F de f .
- Linéarité : $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (l'intégration conserve les inégalités).
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- Aire entre deux courbes, quand f est au-dessus de g sur $[a ; b]$: $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

La méthode

- 1 Je cherche une primitive F de f , puis je calcule $F(b) - F(a)$, en respectant l'ordre des bornes (jamais $F(a) - F(b)$, qui inverserait le signe).
- 2 Pour une intégration par parties, je choisis u et v' (v' facile à intégrer, u qui se simplifie en dérivant), puis j'applique la formule.
- 3 Pour majorer ou minorer une intégrale, je compare d'abord les fonctions elles-mêmes sur l'intervalle, puis j'intègre l'inégalité.
- 4 Pour une aire entre deux courbes, je détermine d'abord laquelle est au-dessus, puis j'intègre leur différence (la plus grande moins la plus petite).

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$; linéarité, positivité, relation de Chasles ; aire entre deux courbes = $\int_a^b (f - g)(x) dx$ quand f est au-dessus de g .

Un exemple entièrement calculé

Pour calculer $\int_0^1 x e^x dx$, je pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1 \times e - 0) - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Attention au piège

Inverser les bornes en calculant $F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$: cela change le signe du résultat. Pour $\int_1^3 x^2 dx$, la bonne valeur est $26/3$, jamais $-26/3$.

Calcul intégral — entoure la bonne réponse

Rappel : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$; linéarité, positivité, relation de Chasles ; aire entre deux courbes $= \int_a^b (f - g)(x) dx$ quand f est au-dessus de g .

 Entoure la bonne réponse.

REGARDE

La fonction $f(x) = 5$ est constante et positive sur $[0 ; 2]$. Que vaut $\int_0^2 5 dx$ (l'aire sous la courbe de f) ?

2

7

5

10

1. On donne $F(x) = x^3/3$, une primitive de $f(x) = x^2$. Que vaut $\int_1^3 x^2 dx$?

-26/3

26

28/3

26/3

2. On sait que $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Que vaut $\int_0^1 (2f(x) + 3) dx$?

14

11

8

7

3. Pour tout x de $[0 ; 2]$, $f(x) \leq g(x)$. Sachant que $\int_0^2 g(x) dx = 9$, que peut-on affirmer sur $\int_0^2 f(x) dx$?

On ne peut rien affirmer

$\int_0^2 f(x) dx \leq 9$

$\int_0^2 f(x) dx = 9$

$\int_0^2 f(x) dx \geq 9$

4. On sait que $\int_0^2 f(x) dx = 5$ et $\int_2^5 f(x) dx = 3$. Que vaut $\int_0^5 f(x) dx$?

15

2

8

5/3

5. Quelle est la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0 ; 3]$?

9

3

1/3

1

6. En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$ (donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$), calculer $\int_0^1 x e^x dx$ par intégration par parties ?

e

0

e - 1

1

ÉTAPE 18 · EXERCICE 1 (SUITE)

7. Sur $[0 ; 1]$, la courbe de $f(x) = x$ est au-dessus de celle de $g(x) = x^2$. Quelle est l'aire comprise entre les deux courbes sur cet intervalle ?

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

La fonction $f(x) = 5$ est constante et positive sur $[0 ; 2]$. Que vaut $\int_0^2 5 \, dx$ (l'aire sous la courbe de f) ?

1. $\int_0^2 5 \, dx$ est l'aire du rectangle de largeur 2 et de hauteur 5.

2. $5 \times 2 = 10$

$\int_0^2 5 \, dx = 10$, aire du rectangle de largeur 2 et de hauteur 5.

1. On donne $F(x) = x^3/3$, une primitive de $f(x) = x^2$. Que vaut $\int_1^3 x^2 \, dx$?

Résultat :

2. On sait que $\int_0^1 f(x) \, dx = 4$. Que vaut $\int_0^1 (2f(x) + 3) \, dx$?

Résultat :

3. Pour tout x de $[0 ; 2]$, $f(x) \leq g(x)$. Sachant que $\int_0^2 g(x) \, dx = 9$, que peut-on affirmer sur $\int_0^2 f(x) \, dx$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 17 • Équations différentielles

Rappel : $y' = ay$: solutions $y = Ce^{ax}$. $y' = ay + b$: solutions $y = Ce^{ax} + k$, où k est la solution particulière constante. $y' = ay + f$: solutions $y = Ce^{ax} + y_p$, où y_p est une solution particulière donnée.



Scanne le code : la série « Équations différentielles » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Équations différentielles » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=equations-differentielles-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 18 • Calcul intégral

Rappel : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$; linéarité, positivité, relation de Chasles ; aire entre deux courbes = $\int_a^b (f - g)(x) dx$ quand f est au-dessus de g .



Scanne le code : la série « Calcul intégral » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Calcul intégral » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=calcul-integral-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Succession d'épreuves indépendantes

Répéter une expérience au hasard, encore et encore : la probabilité de tout un scénario tient dans un seul produit, à condition que les épreuves ne se gênent jamais entre elles.

Les mots à connaître

- **épreuves indépendantes** — Des épreuves dont le résultat de l'une n'influence JAMAIS la probabilité des autres — une hypothèse à justifier par le contexte (tirage AVEC remise, dés différents...), jamais à supposer par habitude.
- **succession d'épreuves quelconques** — Plusieurs épreuves indépendantes, mais qui n'ont pas forcément la même probabilité de succès d'une épreuve à l'autre — à distinguer du schéma de Bernoulli, où elles sont en plus identiques.

Ce que je sais déjà

- Le modèle de la succession d'épreuves indépendantes énonce que la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune de ses composantes x_i .
- Cette succession se représente par un arbre : la probabilité d'un chemin, du sommet à une feuille, est le produit des probabilités portées par ses branches (règle du chemin).
- L'indépendance ne se suppose JAMAIS sans la justifier : un tirage SANS remise, par exemple, ne donne pas des épreuves indépendantes.

La méthode

- 1 Je vérifie que les épreuves sont bien indépendantes (remise, expériences physiquement séparées...) : sans cette justification, je ne peux pas multiplier les probabilités.
- 2 Je représente la situation par un arbre si le nombre d'épreuves est petit (deux ou trois), en inscrivant sur chaque branche la probabilité de l'issue qu'elle porte.
- 3 Pour une issue précise, je multiplie les probabilités des branches du chemin qui y mène.
- 4 S'il existe plusieurs chemins menant au même évènement, j'additionne leurs probabilités (règle des chemins), ou je passe par le complémentaire si c'est plus court.

$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n)$, pour des épreuves indépendantes ; la probabilité d'un chemin d'arbre est le produit de ses branches.

Un exemple entièrement calculé

Trois capteurs indépendants surveillent une machine, chacun fiable avec la probabilité $9/10$.
 Probabilité que les trois fonctionnent : $9/10 \times 9/10 \times 9/10 = 729/1000$.
 Probabilité qu'AU MOINS un tombe en panne (complémentaire) : $1 - 729/1000 = 271/1000$.

Attention au piège

Supposer l'indépendance sans la justifier : pour un tirage SANS remise, le second tirage dépend du premier (la composition de l'urne a changé), et la règle du produit s'applique alors avec des probabilités CONDITIONNELLES, jamais les mêmes probabilités qu'au premier tirage.

Succession d'épreuves indépendantes — entoure la bonne réponse

Rappel : $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n)$, pour des épreuves indépendantes ; la probabilité d'un chemin d'arbre est le produit de ses branches.

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Dans le modèle de la succession de plusieurs épreuves indépendantes, comment calcule-t-on la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ à partir des probabilités de chacune des composantes x_i ?

On multiplie
seulement les deux
premières
composantes

On multiplie les
probabilités des n
composantes

On calcule la
moyenne des
probabilités des n
composantes

On additionne les
probabilités des n
composantes

1. Un horticulteur sème trois graines de la même variété. Chaque graine germe avec la probabilité $4/5$, indépendamment des autres. Quelle est la probabilité que les trois graines germent ?

1/125

16/25

4/5

64/125

2. Un jardinier sème trois graines d'espèces DIFFÉRENTES (une succession de trois épreuves quelconques, mais indépendantes) : elles germent respectivement avec les probabilités $3/4$, $2/3$ et $1/2$. Quelle est la probabilité que les trois graines germent ?

1/4

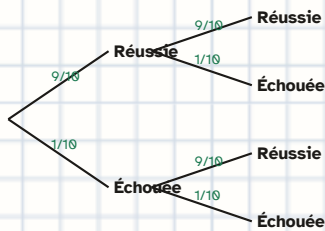
1/3

23/36

1/2

ÉTAPE 19 • EXERCICE 1 (SUITE)

3. Un serveur envoie deux paquets de données l'un après l'autre. Chaque envoi réussit avec la probabilité $9/10$, indépendamment de l'autre. D'après cet arbre, quelle est la probabilité que les deux envois réussissent ?



9/50

9/10

81/100

1/100

4. Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 bleues. On tire deux boules SANS remise. Un élève affirme, sans le justifier, que les deux tirages sont indépendants, et calcule $P(\text{rouge puis rouge}) = 4/10 \times 4/10 = 4/25$. Que penser de ce calcul ?

Il est faux, mais la bonne valeur est $4/10 \times 4/9 = 8/45$

Il est faux : un tirage sans remise n'est PAS indépendant, il faut écrire $P(\text{rouge puis rouge}) = 4/10 \times 3/9 = 2/15$

Il est juste, car deux tirages successifs sont toujours indépendants

On ne peut calculer aucune probabilité sans remise

5. Un candidat répond, de façon indépendante, à trois questionnaires différents : il répond correctement au premier avec la probabilité $1/2$, au deuxième avec $1/3$, au troisième avec $1/4$. Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement aux trois ?

1/9

1/24

1/12

1/6

ÉTAPE 19 · EXERCICE 1 (SUITE)

6. Deux capteurs indépendants surveillent une machine ; chacun détecte, à tort, une anomalie avec la probabilité $1/20$. Quelle est la probabilité qu'AU MOINS un des deux capteurs déclenche une fausse alerte ?

1/10

1/400

361/400

39/400

7. Sur un arbre représentant une succession de TROIS épreuves indépendantes, comment calcule-t-on la probabilité de l'issue correspondant à un chemin précis, du sommet jusqu'à une feuille ?

En ne gardant que la probabilité inscrite sur la dernière branche

En additionnant les probabilités inscrites sur les trois branches empruntées

En multipliant les probabilités inscrites sur les trois branches empruntées

En multipliant seulement les probabilités des deux premières branches

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Dans le modèle de la succession de plusieurs épreuves indépendantes, comment calcule-t-on la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ à partir des probabilités de chacune des composantes x_i ?

1. Le modèle de la succession d'épreuves indépendantes pose que la probabilité d'une issue est ÉGALE au produit des probabilités de ses composantes : c'est la propriété multiplicative de l'indépendance.
2. Additionner ou moyenner les probabilités ne correspond à aucune règle du calcul des probabilités pour une succession d'épreuves.

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n), \text{ par indépendance des épreuves.}$$

1. Un horticulteur sème trois graines de la même variété. Chaque graine germe avec la probabilité $4/5$, indépendamment des autres. Quelle est la probabilité que les trois graines germent ?

Résultat :

2. Un jardinier sème trois graines d'espèces DIFFÉRENTES (une succession de trois épreuves quelconques, mais indépendantes) : elles germent respectivement avec les probabilités $3/4$, $2/3$ et $1/2$. Quelle est la probabilité que les trois graines germent ?

Résultat :

3. Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 bleues. On tire deux boules SANS remise. Un élève affirme, sans le justifier, que les deux tirages sont indépendants, et calcule $P(\text{rouge puis rouge}) = 4/10 \times 4/10 = 4/25$. Que penser de ce calcul ?

Résultat :

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Une pièce, une graine, une pièce défectueuse : dès qu'une expérience n'a que deux issues répétées à l'identique, la loi binomiale en compte les succès sans jamais lister tous les cas.

Les mots à connaître

- **épreuve de Bernoulli** — Une expérience aléatoire à deux issues : un succès, de probabilité p , et un échec, de probabilité $1 - p$.
- **loi binomiale** $\mathcal{B}(n ; p)$ — La loi de probabilité du nombre X de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de n épreuves de paramètre p .
- **schéma de Bernoulli** — La répétition de n épreuves de Bernoulli INDÉPENDANTES et IDENTIQUES (même paramètre p à chaque répétition).

Ce que je sais déjà

· Dans un schéma de Bernoulli, chaque issue à exactement k succès a la MÊME probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$, quel que soit l'ordre des succès et des échecs.

· Le nombre de chemins de l'arbre menant à exactement k succès parmi n épreuves est le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, dit « k parmi n ».

· Pour X suivant $\mathcal{B}(n ; p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$, pour k entier, $0 \leq k \leq n$.

La méthode

- 1 Je vérifie les trois conditions du schéma de Bernoulli : deux issues, épreuves indépendantes, MÊME probabilité p à chaque répétition.
- 2 J'identifie n (le nombre d'épreuves), p (la probabilité de succès) et k (le nombre de succès demandé).
- 3 Je calcule $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins à k succès, puis je le multiplie par $p^k \times (1 - p)^{n-k}$, la probabilité commune à chacun de ces chemins.
- 4 Pour $P(X \leq k)$ ou $P(k \leq X \leq k')$, j'additionne les $P(X = i)$ correspondants, sans jamais confondre « exactement k » et « au moins k » ou « au plus k ».

$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$, où $\binom{n}{k}$ compte les chemins de l'arbre à k succès parmi n épreuves.

Un exemple entièrement calculé

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0,2)$: 4 épreuves, succès de probabilité 0,2.

Nombre de chemins à 1 succès : $\binom{4}{1} = 4$.

Probabilité de chacun de ces chemins : $0,2^1 \times 0,8^3 = 0,2 \times 0,512 = 0,1024$.

Donc $P(X = 1) = 4 \times 0,1024 = 0,4096$.

Attention au piège

Confondre $P(X = k)$, la probabilité d'obtenir EXACTEMENT k succès, avec $P(X \geq k)$, celle d'en obtenir k OU PLUS : ce sont deux nombres différents, et seule la deuxième s'obtient en additionnant plusieurs valeurs de la loi.

Schéma de Bernoulli et loi binomiale — entoure la bonne réponse

Rappel : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$, où $\binom{n}{k}$ compte les chemins de l'arbre à k succès parmi n épreuves.

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que ...

trois issues
possibles

deux issues
possibles : un
succès (probabilité
 p) et un échec
(probabilité $1 - p$)

une seule issue
possible, certaine

un nombre
quelconque d'issues,
toutes
équiprobables

1. Une variable de Bernoulli X , égale à 1 en cas de succès et 0 sinon, a pour paramètre $p = 3/10$. Quelle est sa variance $V(X)$?

3/10

9/100

21/100

7/10

2. Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli ...

quelconques, sans
autre condition

indépendantes et
identiques (même
paramètre p à
chaque répétition)

identiques mais pas
nécessairement
indépendantes

indépendantes mais
de paramètres p
différents à chaque
répétition

3. Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, quelle est l'expression correcte de $P(X = k)$?

$p^k \times (1 - p)^{n-k}$

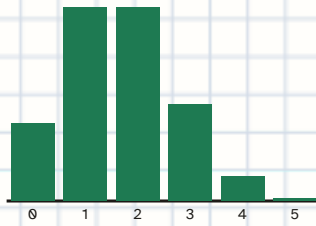
$\binom{n}{k} \times p^k$

$\binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$

$\binom{n}{k} \times p^{n-k} \times (1 - p)^k$

ÉTAPE 20 - EXERCICE 1 (SUITE)

4. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 1/3)$. Quelle est la valeur exacte de $P(X = 3)$?



80/243

40/243

10/27

4/243

5. Un lot contient une proportion $1/10$ de pièces défectueuses. On prélève 4 pièces au hasard, de façon assimilable à un schéma de Bernoulli. X compte le nombre de pièces défectueuses. Quelle est la valeur exacte de $P(X = 1)$?

0,0001

0,2916

0,1

0,6561

6. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6 ; 1/2)$. Quelle est la valeur de $P(X = 2)$, la probabilité d'obtenir EXACTEMENT 2 succès ?

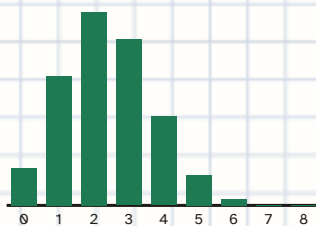
1/2

15/64

57/64

1/4

7. D'après ce diagramme de la loi binomiale $\mathcal{B}(8 ; 0,3)$, pour quelle valeur de k la probabilité $P(X = k)$ est-elle la plus grande ?



2

1

0

3

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que ...

1. Par définition, une épreuve de Bernoulli n'a que DEUX issues : succès (p) et échec ($1 - p$), quel que soit le contexte concret (pièce, graine, pièce défectueuse...).

Une épreuve de Bernoulli a deux issues : succès (probabilité p), échec ($1 - p$).

1. Une variable de Bernoulli X , égale à 1 en cas de succès et 0 sinon, a pour paramètre $p = 3/10$. Quelle est sa variance $V(X)$?

Résultat :

2. Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli ...

Résultat :

3. Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, quelle est l'expression correcte de $P(X = k)$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 19 • Succession d'épreuves indépendantes

Rappel : $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n)$, pour des épreuves indépendantes ; la probabilité d'un chemin d'arbre est le produit de ses branches.



Scanne le code : la série « Succession d'épreuves indépendantes » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Succession d'épreuves indépendantes » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=succession-epreuves-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 20 • Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Rappel : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$, où $\binom{n}{k}$ compte les chemins de l'arbre à k succès parmi n épreuves.



Scanne le code : la série « Schéma de Bernoulli et loi binomiale » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Schéma de Bernoulli et loi binomiale » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=schema-bernoulli-binomiale-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Problèmes sur la loi binomiale

Au-delà du calcul de $P(X = k)$, la loi binomiale répond à des questions de seuil et d'optimisation : combien faut-il de succès pour dépasser un risque donné ? quelle est la valeur la plus probable ?

Les mots à connaître

- **problème de seuil** — Une question du type « quelle est la plus petite (ou la plus grande) valeur de k telle que $P(X \geq k)$ [ou $P(X \leq k)$] reste inférieure à un risque α donné ? ».
- **mode d'une loi binomiale** — La (ou les) valeur(s) de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale — la valeur la plus probable de X , à lire sur le diagramme en barres.

Ce que je sais déjà

- Pour X suivant $\mathcal{B}(n; p)$: $E(X) = n \times p$, $V(X) = n \times p \times (1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$.
- $P(X \geq k)$ est la somme de $P(X = k)$, $P(X = k + 1)$, ..., $P(X = n)$: jamais la seule valeur $P(X = k)$.
- Passer au complémentaire ($P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, par exemple) évite souvent d'additionner de nombreux termes.

La méthode

- 1 Pour un seuil $P(X \geq k)$, je choisis entre additionner directement les termes de k à n , ou passer par le complémentaire si celui-ci comporte moins de termes.
- 2 Pour l'espérance, la variance et l'écart type, j'applique directement les formules $n \times p$, $n \times p \times (1 - p)$ et leur racine carrée — sans jamais oublier le facteur $(1 - p)$ dans la variance.
- 3 Pour trouver la valeur la plus probable (le mode), je compare les $P(X = k)$ successives (à la main pour un petit n , ou en lisant un diagramme).
- 4 Pour un problème de seuil avec un risque α donné, je calcule ou je lis des valeurs cumulées jusqu'à trouver la plus petite (ou la plus grande) valeur de k qui respecte la condition.

Seuil : additionner les $P(X = k)$ concernées, ou passer au complémentaire.
Espérance, variance, écart type : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Un exemple entièrement calculé

X suit $\mathcal{B}(10; 0,1)$ (proportion de pièces défectueuses sur un prélèvement de 10 pièces).

On donne $P(X \geq 3) \approx 0,070$ et $P(X \geq 4) \approx 0,013$.

Pour garantir un risque au plus égal à 0,05, la plus petite valeur de k qui convient est $k = 4$, car 0,070 dépasse 0,05 mais 0,013 lui est inférieur.

Espérance : $E(X) = 10 \times 0,1 = 1$. Variance : $V(X) = 10 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9$.

Attention au piège

Oublier le facteur $(1 - p)$ dans la formule de la variance et écrire, à tort, $V(X) = n \times p$: cette formule confond la variance avec l'espérance, elle-même seulement égale à $n \times p$.

Problèmes sur la loi binomiale — entoure la bonne réponse

Rappel : Seuil : additionner les $P(X = k)$ concernées, ou passer au complémentaire. Espérance, variance, écart type : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

 Entoure la bonne réponse.

REGARDE

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6 ; 1/2)$. Quelle est la valeur de $P(X \geq 4)$?

1/2

15/64

11/32

3/32

1. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 1/5)$. Quelle méthode donne directement $P(Y \geq 1)$ sans additionner cinq termes ?

Calculer $P(Y = 0) \times P(Y = 1) \times \dots \times P(Y = 5)$

Multiplier $P(Y = 0)$ par 5

Passer au complémentaire : $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

Additionner $P(Y = 1)$ et $P(Y = 5)$ seulement

2. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,15)$. Quelle est son espérance $E(X)$?

0,15

2,55

3

20

3. Toujours pour X suivant $\mathcal{B}(20 ; 0,15)$, quelle formule donne correctement la variance $V(X)$?

$V(X) = n \times p \times (1 - p) = 2,55$

$V(X) = n \times p^2 = 0,45$

$V(X) = n \times p = 3$

$V(X) = p \times (1 - p) = 0,1275$

4. Avec $V(X) = 2,55$, quelle est une valeur approchée au centième de l'écart type $\sigma(X)$?

2,55

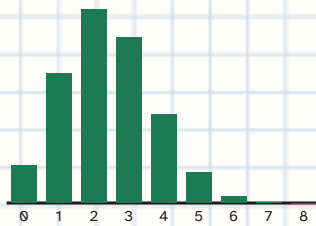
1,6

6,5

3

ÉTAPE 21 • EXERCICE 1 (SUITE)

5. D'après ce diagramme de la loi binomiale $\mathcal{B}(8 ; 0,3)$, quelle valeur de k rend $P(X = k)$ maximale — c'est-à-dire la valeur de X la plus probable ?



0

2

8

4

6. Sur une livraison de 10 pièces, chacune défectueuse avec la probabilité $1/10$ de façon indépendante, on donne $P(X \geq 3) \approx 0,07$ et $P(X \geq 4) \approx 0,013$. Quelle est la plus petite valeur de k telle que $P(X \geq k) \leq 0,05$?

5

3

4

Aucune valeur ne convient

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6 ; 1/2)$. Quelle est la valeur de $P(X \geq 4)$?

1. $P(X \geq 4)$ rassemble TOUTES les issues à 4, 5 OU 6 succès : je dois ADDITIONNER les trois probabilités, jamais garder la seule valeur $P(X = 4)$.

2. $15/64 + 3/32 + 1/64 = 11/32$

$P(X \geq 4) = 11/32$ (jamais $P(X = 4) = 15/64$ seule).

1. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 1/5)$. Quelle méthode donne directement $P(Y \geq 1)$ sans additionner cinq termes ?

Résultat :

2. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,15)$. Quelle est son espérance $E(X)$?

Résultat :

3. Toujours pour X suivant $\mathcal{B}(20 ; 0,15)$, quelle formule donne correctement la variance $V(X)$?

Résultat :

Sommes de variables aléatoires

Décomposer une variable compliquée en somme de variables plus simples : l'espérance s'additionne toujours, la variance seulement quand rien ne relie les morceaux entre eux.

Les mots à connaître

- **échantillon de taille n** — Une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires INDÉPENDANTES, suivant toutes la MÊME loi de probabilité.
- **somme et moyenne d'un échantillon** — $S_n = X_1 + \dots + X_n$, la somme de l'échantillon ; $M_n = S_n/n$, sa moyenne.

Ce que je sais déjà

· Linéarité de l'espérance, TOUJOURS vraie, indépendance ou non : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = a \times E(X)$.

· Additivité de la variance, valable UNIQUEMENT pour des variables indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Et $V(aX) = a^2 \times V(X)$, quelle que soit la dépendance.

· Pour un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'espérance μ et de variance V : $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = nV$, $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = V/n$, et $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$.

La méthode

- 1 Je représente la variable étudiée comme une somme de variables plus simples, si possible indépendantes et identiques (comme dans un schéma de Bernoulli).
- 2 Pour l'espérance, j'applique la linéarité SANS me soucier de l'indépendance : elle est toujours vraie.
- 3 Pour la variance, je vérifie D'ABORD l'indépendance des variables sommées : sans elle, je ne peux rien affirmer sur $V(X + Y)$.
- 4 Pour l'écart type d'une moyenne d'échantillon, je n'oublie JAMAIS la racine carrée de n au dénominateur : $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$, jamais σ/n .

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ toujours ; $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes ; $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$.

Un exemple entièrement calculé

Un échantillon $(X_1, \dots, X_{16})$ de taille 16 a pour écart type $\sigma = 8$.

Écart type de la moyenne : $\sigma(M_{16}) = 8/\sqrt{16} = 8/4 = 2$.

Oublier la racine carrée donnerait, à tort, $8/16 = 0,5$: une valeur bien trop petite.

Attention au piège

Additionner les variances de deux variables SANS avoir vérifié leur indépendance : contrairement à l'espérance, toujours linéaire, l'additivité de la variance est réservée aux variables aléatoires indépendantes.

Sommes de variables aléatoires — entoure la bonne réponse

Rappel : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ toujours ; $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes ; $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$.

☒ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

On donne $E(X) = 3$ et $E(Y) = 5$. Quelle est la valeur de $E(X + Y)$?

8

3

2

15

1. On donne $E(X) = 4$. Quelle est la valeur de $E(3X)$?

4

12

3

7

2. La formule $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est-elle valable même lorsque X et Y ne sont PAS indépendantes ?

Non, elle exige que X et Y aient la même loi

Oui, la linéarité de l'espérance est toujours vraie, indépendance ou non

Cela dépend du signe de $E(X)$ et de $E(Y)$

Non, elle exige que X et Y soient indépendantes

3. X et Y sont deux variables aléatoires INDÉPENDANTES telles que $V(X) = 2$ et $V(Y) = 3$. Quelle est la valeur de $V(X + Y)$?

5

25

2

6

4. X et Y sont deux variables aléatoires dont on NE SAIT PAS si elles sont indépendantes. Peut-on affirmer que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$?

Non : l'additivité de la variance n'est valable QUE pour des variables indépendantes, sans cette hypothèse rien ne le garantit

Oui, toujours, exactement comme pour l'espérance

Non, car la variance n'est jamais additive

Oui, à condition que X et Y aient la même espérance

ÉTAPE 22 · EXERCICE 1 (SUITE)

5. On donne $V(X) = 4$. Quelle est la valeur de $V(3X)$?

6. $(X_1, \dots, X_{10})$ est un échantillon de taille 10 d'une variable aléatoire d'espérance $\mu = 7$. Quelle est l'espérance de $S_{10} = X_1 + \dots + X_{10}$?

7. $(X_1, \dots, X_{16})$ est un échantillon de taille 16 d'une variable aléatoire d'écart type $\sigma = 8$. Quelle est la valeur exacte de l'écart type de la moyenne $M_{16} = S_{16}/16$?

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

On donne $E(X) = 3$ et $E(Y) = 5$. Quelle est la valeur de $E(X + Y)$?1. Par linéarité de l'espérance, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, quelle que soit la dépendance ou l'indépendance de X et de Y .2. $3 + 5 = 8$

$$E(X + Y) = 8.$$

1. On donne $E(X) = 4$. Quelle est la valeur de $E(3X)$?

Résultat :

2. La formule $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ est-elle valable même lorsque X et Y ne sont PAS indépendantes ?

Résultat :

3. X et Y sont deux variables aléatoires INDÉPENDANTES telles que $V(X) = 2$ et $V(Y) = 3$. Quelle est la valeur de $V(X + Y)$?

Résultat :

Regarde la démonstration animée

Étape 21 • Problèmes sur la loi binomiale

Rappel : Seuil : additionner les $P(X = k)$ concernées, ou passer au complémentaire. Espérance, variance, écart type : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.



Scanne le code : la série « Problèmes sur la loi binomiale » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Problèmes sur la loi binomiale » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=binomiale-problemes-tle

Mes erreurs sur les 6 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Étape 22 • Sommes de variables aléatoires

Rappel : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ toujours ; $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes ; $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$.



Scanne le code : la série « Sommes de variables aléatoires » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Sommes de variables aléatoires » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=sommes-variables-aleatoires-tle

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

Concentration et loi des grands nombres

Un écart type mesure la dispersion d'une variable autour de sa moyenne ; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en tire un majorant universel, qui couronne toute la partie « Probabilités » avec la loi des grands nombres.

Les mots à connaître

- **inégalité de Bienaymé-Tchebychev** — Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance $V(X)$, et tout réel δ strictement positif : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$.
- **inégalité de concentration** — La même idée appliquée à la moyenne M_n d'un échantillon de taille n : $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n \times \delta^2)$, où V est la variance de la variable étudiée.
- **loi des grands nombres** — Pour tout δ strictement positif, $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand la taille n de l'échantillon tend vers $+\infty$.

Ce que je sais déjà

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne un MAJORANT de la probabilité, jamais sa valeur exacte : la probabilité réelle peut être bien plus petite.
- Dans les deux inégalités, c'est bien la VARIANCE $V(X)$ qui figure au numérateur, jamais l'écart type $\sigma(X)$ seul ($V(X) = \sigma(X)^2$).
- Le nombre n , à mesure qu'il grandit, fait diminuer le majorant $V/(n \times \delta^2)$: c'est le mécanisme même de la concentration et de la loi des grands nombres.

La méthode

- 1 J'identifie la variance $V(X)$ (et non l'écart type) et le seuil δ de la question, ou la taille n de l'échantillon si l'inégalité de concentration s'applique.
- 2 Je remplace ces valeurs dans $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$ (variable isolée) ou $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$ (moyenne d'échantillon).
- 3 Pour déterminer une taille d'échantillon garantissant un risque donné, j'isole n dans l'inégalité : $n \geq V/(\delta^2 \times \text{risque})$.
- 4 Je garde à l'esprit que le résultat obtenu est un majorant : je ne le confonds jamais avec la valeur exacte de la probabilité.

$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$; $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$; et $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (loi des grands nombres).

Concentration et loi des grands nombres — l'exemple

Un exemple entièrement calculé

Une variable aléatoire a pour variance $V = 9$. On veut $P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq 0,05$.

Je résous $9/(n \times 0,5^2) \leq 0,05$, soit $n \geq 9/(0,25 \times 0,05) = 9/0,0125 = 720$.

La plus petite taille d'échantillon qui convient est donc $n = 720$.

Attention au piège

Utiliser directement l'écart type $\sigma(X)$ au numérateur au lieu de la variance $V(X)$: il faut d'abord ÉLEVER $\sigma(X)$ au carré ($V(X) = \sigma(X)^2$), sinon le majorant obtenu est faux, et beaucoup trop petit.

Concentration et loi des grands nombres — entoure la bonne réponse

Rappel : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$; $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$; et $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (loi des grands nombres).

☐ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance $V(X)$, et pour tout réel strictement positif δ , quelle est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \delta^2/V(X)$$

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$$

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \geq V(X)/\delta^2$$

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta$$

1. Une variable aléatoire X a pour variance $V(X) = 4$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quel majorant obtient-on pour $P(|X - \mu| \geq 4)$?

16/4

1/4

4

16

2. M_n est la moyenne d'un échantillon de taille $n = 100$ d'une variable aléatoire de variance $V = 16$. D'après l'inégalité de concentration, quel majorant obtient-on pour $P(|M_{100} - \mu| \geq 2)$?

1/25

16/100

16

16/4

3. Une variable aléatoire a pour variance $V = 9$. On veut garantir $P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq 0,05$. D'après l'inégalité de concentration, quelle est la plus petite taille d'échantillon n qui convient ?

9

18

360

720

4. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour une variable aléatoire X , un réel M tel que $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq M$. Que représente ce nombre M ?

La valeur exacte de la probabilité $P(|X - \mu| \geq \delta)$

Un MAJORANT de la probabilité, pas sa valeur exacte

La probabilité que X soit égal à μ

L'espérance de X

ÉTAPE 23 · EXERCICE 1 (SUITE)

5. Que dit la loi des grands nombres, pour une moyenne d'échantillon M_n d'espérance μ , lorsque la taille n de l'échantillon tend vers $+\infty$?

La variance de M_n
devient infinie

Pour tout δ
strictement positif,
 $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend
vers 0

M_n devient
exactement égale à
 μ , pour n assez
grand

$P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend
vers 1

6. V et δ étant fixés, que devient le majorant $V/(n \times \delta^2)$ de l'inégalité de concentration lorsque la taille n de l'échantillon augmente ?

Il augmente, sans
limite

Il reste constant,
quel que soit n

Il diminue, et tend
vers 0

Il devient négatif

7. Une variable aléatoire X a pour écart type $\sigma(X) = 5$ (et non sa variance directement). D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quel majorant obtient-on pour $P(|X - \mu| \geq 10)$?

5

1/4

1/20

10/5

Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

REGARDE

Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance $V(X)$, et pour tout réel strictement positif δ , quelle est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

1. L'inégalité majore la probabilité d'un grand écart à la moyenne par $V(X)/\delta^2$, le dénominateur portant δ AU CARRÉ, jamais δ seul.
2. Inverser le sens de l'inégalité, ou inverser le quotient, donneraient des énoncés faux.

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2, \text{ pour tout réel strictement positif } \delta.$$

1. Une variable aléatoire X a pour variance $V(X) = 4$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quel majorant obtient-on pour $P(|X - \mu| \geq 4)$?

Résultat :

2. M_n est la moyenne d'un échantillon de taille $n = 100$ d'une variable aléatoire de variance $V = 16$. D'après l'inégalité de concentration, quel majorant obtient-on pour $P(|M_{100} - \mu| \geq 2)$?

Résultat :

3. Une variable aléatoire a pour variance $V = 9$. On veut garantir $P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq 0,05$. D'après l'inégalité de concentration, quelle est la plus petite taille d'échantillon n qui convient ?

Résultat :

Python : simulation et échantillons

Une liste de valeurs simulées se manipule avec quelques outils simples : la parcourir, en extraire une moyenne, un écart type, ou faire avancer une marche pas à pas.

Les mots à connaître

- **liste en compréhension** — Une liste générée en une ligne à partir d'une règle appliquée à chaque élément d'une autre liste, par exemple `[1 if x == 6 else 0 for x in tirages]`.
- **marche aléatoire** — Une suite de positions sur une droite, chacune obtenue en ajoutant un pas (+1 ou -1, par exemple) à la position précédente.

Ce que je sais déjà

- La moyenne d'un échantillon simulé s'obtient par `sum(echantillon) / len(echantillon)`.
- La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; l'écart type en est la racine carrée.
- Parcourir une liste avec `for x in liste` permet de compter, sommer, ou construire une nouvelle liste élément par élément.

La méthode

- 1 Je génère la liste des valeurs simulées : en extension, par ajouts successifs (`append()`), ou en compréhension.
- 2 Je parcours cette liste avec une boucle `for` pour calculer une somme, un comptage, ou une fréquence.
- 3 Pour la variance, je calcule d'abord la moyenne, puis je parcours à nouveau la liste pour sommer les carrés des écarts à cette moyenne, avant de diviser par l'effectif.
- 4 Pour une marche aléatoire, je pars d'une position initiale et j'ajoute, à chaque tour de boucle, le pas courant à la DERNIÈRE position enregistrée.

moyenne : `sum(liste) / len(liste)` ; variance : moyenne des carrés des écarts ; écart type : racine carrée de la variance.

Un exemple entièrement calculé

Échantillon simulé : `echantillon = [2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9]`.

Moyenne : $(2 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 7 + 9) / 8 = 5$.

Variance : $(9 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 4 + 16) / 8 = 4$.

Écart type : $\sqrt{4} = 2$.

Attention au piège

Diviser la somme des carrés des écarts par l'effectif AVANT d'avoir soustrait la moyenne à chaque valeur : la variance exige de calculer chaque écart, de l'élever au carré, puis SEULEMENT ensuite de diviser leur somme par l'effectif.

Python : simulation et échantillons — entoure la bonne réponse

Rappel : moyenne : `sum(liste) / len(liste)` ; variance : moyenne des carrés des écarts ; écart type : racine carrée de la variance.

○ Entoure la bonne réponse.

REGARDE

Cette liste enregistre 5 valeurs simulées d'une variable aléatoire : `echantillon = [2, 3, 5, 7, 3]`. Quelle est la moyenne de cet échantillon ?

20

7

2

4

1. On exécute `echantillon = [2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9]`
`moyenne = sum(echantillon) / len(echantillon)`. La moyenne obtenue vaut 5. Quelle est la variance de cet échantillon (moyenne des carrés des écarts à la moyenne) ?

5

4

8

2

2. Avec la variance 4 trouvée pour cet échantillon, quel est son écart type ?

0,5

2

4

16

3. On exécute `tirages = [3, 6, 2, 6, 6, 1]`
`indicateurs = [1 if x == 6 else 0 for x in tirages]`. Quelle est la valeur de `indicateurs` ?

[3, 6, 2, 6, 6, 1]

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

[0, 1, 0, 1, 1, 0]

[0, 0, 0, 0, 0, 0]

4. Un schéma de Bernoulli est simulé 10 fois, un succès étant codé 1 et un échec 0 : `echantillon = [1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1]`. Quelle est la fréquence empirique des succès dans cet échantillon ?

1/2

7/3

3/10

7/10

5. On simule une marche aléatoire simple sur une droite graduée avec ce code, où chaque pas vaut +1 ou -1 :
- ```
position = 0
for pas in [1, -1, 1, 1, -1]:
 position = position + pas.
```
- Quelle est la valeur finale de `position` ?

0

5

-1

1

#### ÉTAPE 24 · EXERCICE 1 (SUITE)

6. On exécute `positions = [0]`  
`for pas in [1, 1, -1, 1]:`  
`positions.append(positions[-1] + pas)`. Quelle est la valeur de `positions` à la fin, la LISTE complète des positions successives de la marche ?

**[1, 1, -1, 1]**

**[2, 1, 2, 1, 0]**

**[0, 1, 2, 1, 2]**

**[2]**

7. Pour l'échantillon simulé `echantillon = [1, 3, 5, 7, 9]`, la moyenne vaut 5 et la variance vaut 8. Quelle est une valeur approchée au centième de l'écart type de cet échantillon ?

**2,83**

**8**

**64**

**5**

## Je démontre



Rédige la démonstration : ce que tu sais, tes étapes, puis encadre le résultat.

## REGARDE

Cette liste enregistre 5 valeurs simulées d'une variable aléatoire : `echantillon = [2, 3, 5, 7, 3]`. Quelle est la moyenne de cet échantillon ?

1. La moyenne d'un échantillon est la somme de ses valeurs, divisée par son effectif.

2.  $(2 + 3 + 5 + 7 + 3) / 5 = 4$

**La moyenne de cet échantillon est 4.**

1. On exécute `echantillon = [2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9]`

`moyenne = sum(echantillon) / len(echantillon)`. La moyenne obtenue vaut 5. Quelle est la variance de cet échantillon (moyenne des carrés des écarts à la moyenne) ?

Résultat :

2. Avec la variance 4 trouvée pour cet échantillon, quel est son écart type ?

Résultat :

3. On exécute `tirages = [3, 6, 2, 6, 6, 1]`

`indicateurs = [1 if x == 6 else 0 for x in tirages]`. Quelle est la valeur de `indicateurs` ?

Résultat :

## Regarde la démonstration animée

### Étape 23 • Concentration et loi des grands nombres

**Rappel :**  $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$  ;  $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$  ; et  $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (loi des grands nombres).



Scanne le code : la série « Concentration et loi des grands nombres » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Concentration et loi des grands nombres » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

[moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=concentration-loi-grands-nombres-tle](http://moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=concentration-loi-grands-nombres-tle)

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

### Étape 24 • Python : simulation et échantillons

**Rappel :** moyenne :  $\text{sum}(\text{liste}) / \text{len}(\text{liste})$  ; variance : moyenne des carrés des écarts ; écart type : racine carrée de la variance.



Scanne le code : la série « Python : simulation et échantillons » s'ouvre sur le site avec la démonstration animée de chaque question. Corrige-toi, puis colorie ta médaille page 4.



1. Scanne le code avec un téléphone.
2. La série « Python : simulation et échantillons » s'ouvre sur le site.
3. Réponds, puis regarde la démonstration animée si tu hésites.
4. Reviens ici colorier ta médaille (page 4).

[moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=python-simulation-echantillons-tle](http://moncoachdemath.fr/exercice.php?c=tle&s=python-simulation-echantillons-tle)

Mes erreurs sur les 7 questions notées :



or • 0 erreur



argent • 1



bronze • 2

# Les démonstrations du programme

Le programme de Tle demande de savoir **démontrer**, pas seulement calculer : il liste des démonstrations à connaître. Les voici, rédigées comme au tableau — les hypothèses, chaque étape justifiée, le résultat encadré — puis vérifiées sur un exemple chiffré. Lis-les, puis refais-les de mémoire sur une feuille : c'est le seul moyen de les retenir.

1. Démonstration par dénombrement de la relation :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .
2. Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).
3. Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .
4. Équation cartésienne du plan normal au vecteur  $\vec{n}$  et passant par le point  $A$ .
5. Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
6. Limite de  $(q^n)$ , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
7. Divergence vers  $+\infty$  d'une suite minorée par une suite divergeant vers  $+\infty$ .
8. Limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction exponentielle.
9. Croissance comparée de  $x \mapsto x^n$  et  $\exp$  en  $+\infty$ .
10. Si  $f''$  est positive, alors la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de ses tangentes.
11. Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
12. Limite en  $0$  de  $x \mapsto x \ln(x)$ .
13. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
14. Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un nombre réel.
15. Pour une fonction positive croissante  $f$  sur  $[a,b]$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$ . Pour toute primitive  $F$  de  $f$ , relation  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .
16. Intégration par parties.
17. Expression de la probabilité de  $k$  succès dans le schéma de Bernoulli.
18. Espérance et variance de la loi binomiale.

# Démonstration : la somme des coefficients binomiaux

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Démonstration par dénombrement de la relation :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .**

*Compter deux fois le même ensemble, de deux façons différentes, et poser que les deux résultats sont forcément égaux : c'est tout le principe d'une preuve par dénombrement.*

## Les mots à connaître

- **double comptage** — Une méthode de preuve : compter un même ensemble de deux façons différentes prouve que les deux résultats obtenus sont égaux.

## Hypothèses et définitions

- Le nombre de parties d'un ensemble à  $n$  éléments est  $2^n$  (chaque élément est, ou n'est pas, dans la partie : 2 choix indépendants par élément).
- Le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est, par définition,  $\binom{n}{k}$ .
- Toute partie d'un ensemble à  $n$  éléments a un nombre d'éléments bien déterminé, compris entre 0 et  $n$ .

## La démonstration

- 1 Je considère un ensemble  $E$  à  $n$  éléments, et je compte le nombre de parties de  $E$  de deux façons différentes.
- 2 Première façon : je décide, pour CHACUN des  $n$  éléments, s'il fait partie de la partie construite ou non — 2 choix indépendants par élément, donc  $2^n$  parties en tout, par le principe multiplicatif.
- 3 Deuxième façon : je classe les parties de  $E$  selon leur nombre d'éléments  $k$ , avec  $k$  allant de 0 à  $n$ . Le nombre de parties à  $k$  éléments est, par définition,  $\binom{n}{k}$ .
- 4 Chaque partie de  $E$  a un nombre d'éléments bien déterminé : je retrouve donc le nombre total de parties en additionnant, pour  $k$  allant de 0 à  $n$ , le nombre de parties à  $k$  éléments :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .
- 5 Les deux comptages dénombrent le même ensemble (les parties de  $E$ ) : ils sont donc égaux, ce qui donne  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

---

**Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .**

---

## Démonstration : la somme des coefficients binomiaux — la vérification

### Vérification sur un exemple

Prenons  $n = 3$ , avec l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$ .

$\binom{3}{0} = 1$  (l'ensemble vide),  $\binom{3}{1} = 3$ ,  $\binom{3}{2} = 3$ ,  $\binom{3}{3} = 1$  (E lui-même).

$1 + 3 + 3 + 1 = 8$ .

Et  $2^3 = 8$  : les deux comptages coïncident, comme prévu.

### L'erreur de raisonnement classique

Confondre cette relation avec le nombre de k-uplets d'éléments distincts (qui compte  $n!/(n - k)!$ , avec un ordre) : la relation  $\sum \binom{n}{k} = 2^n$  ne porte que sur des PARTIES, c'est-à-dire des sous-ensembles, sans aucun ordre entre leurs éléments.

# Démonstration : la relation de Pascal

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).**

*Une même relation, deux regards : un calcul de fractions qui tombe juste, puis un argument de dénombrement qui rend ce calcul évident.*

## Les mots à connaître

- **relation de Pascal** — Pour  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $(n \ k) = (n - 1, k - 1) + (n - 1, k)$  : chaque coefficient du triangle de Pascal est la somme des deux qui sont juste au-dessus de lui.

## Hypothèses et définitions

- Le coefficient binomial se calcule par  $(n \ k) = n! / (k!(n - k)!)$ .
- Compter un même ensemble de deux façons différentes prouve que les deux résultats sont égaux (principe du double comptage).
- Le principe additif s'applique à des cas disjoints qui recouvrent toutes les possibilités : leur somme donne le total.

## La démonstration

- 1 Je démontre d'abord la relation de Pascal PAR LE CALCUL, à partir de  $(n - 1, k - 1) = (n - 1)! / ((k - 1)!(n - k + 1)!)$  et  $(n - 1, k) = (n - 1)! / (k!(n - k)!)$ .
- 2 Je mets ces deux fractions au même dénominateur  $k!(n - k)!$ , en multipliant la première par  $k/k$  et la seconde par  $(n - k)/(n - k)$  :  $(n - 1, k - 1) + (n - 1, k) = [k \times (n - 1)! + (n - k) \times (n - 1)!] / (k!(n - k)!)$ .
- 3 Je factorise le numérateur par  $(n - 1)!$  :  $k \times (n - 1)! + (n - k) \times (n - 1)! = (n - 1)! \times (k + n - k) = n \times (n - 1)! = n!$ . Le calcul donne donc  $(n - 1, k - 1) + (n - 1, k) = n! / (k!(n - k)!) = (n \ k)$  : c'est la relation de Pascal, retrouvée PAR LE CALCUL.
- 4 Je la redémontre ensuite PAR UNE MÉTHODE COMBINATOIRE : je fixe un élément  $a$  d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments, et je classe les parties de  $E$  à  $k$  éléments selon qu'elles contiennent  $a$  ou non.
- 5 Les parties CONTENANT  $a$  s'obtiennent en choisissant les  $k - 1$  éléments restants parmi les  $n - 1$  autres éléments de  $E$  : il y en a  $(n - 1, k - 1)$ . Les parties NE CONTENANT PAS  $a$  s'obtiennent en choisissant les  $k$  éléments parmi ces mêmes  $n - 1$  autres éléments : il y en a  $(n - 1, k)$ .
- 6 Ces deux cas sont disjoints (une partie contient  $a$  ou ne le contient pas, jamais les deux) et recouvrent toutes les parties à  $k$  éléments de  $E$  : par le principe additif,  $(n \ k) = (n - 1, k - 1) + (n - 1, k)$ .

**Pour  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $(n \ k) = (n - 1, k - 1) + (n - 1, k)$  — la relation de Pascal, démontrée par le calcul et par une méthode combinatoire.**

## Démonstration : la relation de Pascal — la vérification

### Vérification sur un exemple

Prenons  $n = 5$  et  $k = 2$ .

$\binom{4}{1} = 4$  et  $\binom{4}{2} = 6$ .

$4 + 6 = 10$ .

Et  $\binom{5}{2} = 5!/(2! \times 3!) = 120/(2 \times 6) = 10$  : les deux calculs coïncident, comme le prévoit la relation de Pascal.

### L'erreur de raisonnement classique

Confondre la relation de Pascal (qui relie TROIS coefficients binomiaux entre eux, ligne par ligne) avec la relation  $\sum \binom{n}{k} = 2^n$  (qui additionne TOUS les coefficients d'une même ligne) : les deux se démontrent par dénombrement, mais elles ne comptent pas le même ensemble.

# Démonstration : le projeté orthogonal, point le plus proche

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .**

*Un triangle rectangle caché dans l'espace suffit à prouver ce qu'on utilise sans y penser : la distance d'un point à un plan se mesure PERPENDICULAIREMENT à ce plan, jamais autrement.*

## Les mots à connaître

- **projeté orthogonal** — Le point  $H$  d'un plan  $P$  tel que le vecteur  $\vec{MH}$  soit orthogonal à tous les vecteurs de la direction de  $P$  (colinéaire au vecteur normal de  $P$ ).

## Hypothèses et définitions

- Le projeté orthogonal  $H$  de  $M$  sur  $P$  vérifie :  $\vec{MH}$  est orthogonal à tout vecteur de la direction de  $P$ .
- Théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.
- Deux longueurs sont toujours positives ou nulles : comparer leurs carrés revient à les comparer elles-mêmes.

## La démonstration

- 1 Je note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $P$ , et je considère un point  $Q$  quelconque de  $P$ , distinct de  $H$ .
- 2 Par définition du projeté orthogonal, le vecteur  $\vec{MH}$  est orthogonal à tout vecteur de la direction de  $P$ , en particulier au vecteur  $\vec{HQ}$  ( $H$  et  $Q$  appartenant tous deux à  $P$ ).
- 3 Le triangle  $MHQ$  est donc rectangle en  $H$  : d'après le théorème de Pythagore,  $MQ^2 = MH^2 + HQ^2$ .
- 4 Comme  $Q \neq H$ ,  $HQ^2$  est strictement positif, donc  $MQ^2 > MH^2$  ; et comme  $MQ$  et  $MH$  sont des longueurs positives, cette inégalité entre les carrés donne  $MQ > MH$ .
- 5 Cette inégalité est vraie pour TOUT point  $Q$  de  $P$  distinct de  $H$  :  $H$  est donc, parmi tous les points de  $P$ , celui qui est le plus proche de  $M$ .

---

**Le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $M$  sur un plan  $P$  est l'unique point de  $P$  tel que  $MH$  soit minimale : c'est le point de  $P$  le plus proche de  $M$ .**

---

## Démonstration : le projeté orthogonal, point le plus proche — la vérification

### Vérification sur un exemple

Le plan  $P$  a pour équation  $x = 0$ , et  $M$  a pour coordonnées  $(5 ; 3 ; -2)$ . Le projeté orthogonal de  $M$  sur  $P$  est  $H(0 ; 3 ; -2)$  :  $MH = 5$ .

Prenons un autre point de  $P$ , par exemple  $O(0 ; 0 ; 0)$ .

$$MO = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 9 + 4} = \sqrt{38} \approx 6,16.$$

$MO \approx 6,16$  est bien supérieure à  $MH = 5$  :  $H$  reste plus proche de  $M$  que  $O$ , comme le prévoit la démonstration.

### L'erreur de raisonnement classique

Croire que N'IMPORTE QUEL point du plan situé « en face » de  $M$  pourrait convenir : seul le projeté orthogonal, défini par l'orthogonalité de  $\vec{MH}$  avec la direction du plan, rend le triangle  $MHP$  rectangle en  $H$  — sans cette orthogonalité, l'argument de Pythagore ne s'applique plus.

# Démonstration : l'équation cartésienne du plan normal à un vecteur

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Équation cartésienne du plan normal au vecteur  $\vec{n}$  et passant par le point A.**

*Une seule condition d'orthogonalité, développée en coordonnées, suffit à faire apparaître l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  qui décrit tout un plan de l'espace.*

## Les mots à connaître

- **plan normal à  $\vec{n}$**  — Le plan formé de tous les points M tels que  $\vec{AM}$  soit orthogonal au vecteur  $\vec{n}$ , pour un point A et un vecteur  $\vec{n}$  donnés.

## Hypothèses et définitions

- M appartient au plan passant par A et normal à  $\vec{n}$  si et seulement si  $\vec{AM}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ , c'est-à-dire si  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .
- En base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs de coordonnées  $(x ; y ; z)$  et  $(a ; b ; c)$  vaut  $ax + by + cz$ .
- Les coordonnées de  $\vec{AM}$ , pour  $A(x_A ; y_A ; z_A)$  et  $M(x ; y ; z)$ , sont  $(x - x_A ; y - y_A ; z - z_A)$ .

## La démonstration

- 1 Je note  $A(x_A ; y_A ; z_A)$  et  $\vec{n}(a ; b ; c)$  le vecteur normal donné, et je cherche l'équation vérifiée par les points  $M(x ; y ; z)$  du plan passant par A et normal à  $\vec{n}$ .
- 2 Par définition, M appartient à ce plan si et seulement si le vecteur  $\vec{AM}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ , c'est-à-dire si  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .
- 3 Les coordonnées de  $\vec{AM}$  sont  $(x - x_A ; y - y_A ; z - z_A)$ . Le produit scalaire en base orthonormée s'écrit donc  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ .
- 4 Je développe :  $ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0$ , puis je regroupe les constantes :  $ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$ .
- 5 En posant  $d = -ax_A - by_A - cz_A$ , j'obtiens une équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  : c'est l'équation cartésienne cherchée.

---

**Le plan passant par  $A(x_A ; y_A ; z_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a ; b ; c)$  a pour équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$ , avec  $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ .**

---

## Démonstration : l'équation cartésienne du plan normal à un vecteur — la vérification

### Vérification sur un exemple

Soit  $A(1 ; 2 ; -1)$  et  $\vec{n}(3 ; -1 ; 2)$ .

$$3(x - 1) - 1(y - 2) + 2(z + 1) = 0.$$

$$3x - 3 - y + 2 + 2z + 2 = 0.$$

Le plan a pour équation cartésienne  $3x - y + 2z + 1 = 0$ .

### L'erreur de raisonnement classique

Se tromper de signe en calculant la constante  $d$  :  $d = -(a \times x_A + b \times y_A + c \times z_A)$ , avec un signe MOINS devant toute la parenthèse — l'oublier change le plan obtenu, alors que le vecteur normal et le point de départ étaient corrects.

# Démonstration : toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .**

*Ne jamais s'arrêter de grandir, et n'avoir aucun plafond : cela suffit à garantir que la suite dépasse un jour n'importe quel seuil, aussi grand soit-il.*

## Les mots à connaître

- **suite non majorée** — Une suite telle qu'aucun réel n'est un majorant : pour tout réel  $A$ , il existe un terme de la suite strictement supérieur à  $A$ .

## Hypothèses et définitions

· Une suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle  $[A ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

· Une suite  $(u_n)$  est non majorée si, pour tout réel  $A$ , il existe un rang  $p$  tel que  $u_p$  soit strictement supérieur à  $A$ .

· Une suite croissante vérifie  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$ , donc  $u_m \geq u_p$  dès que  $m \geq p$ .

## La démonstration

- 1 Je fixe un réel  $A$  quelconque : je dois montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite dépassent  $A$ .
- 2 Comme la suite n'est pas majorée,  $A$  n'est pas un majorant : il existe un rang  $p$  tel que  $u_p > A$ .
- 3 Comme la suite est croissante, pour tout entier  $n \geq p$ , j'ai  $u_n \geq u_p > A$ .
- 4 J'ai donc trouvé un rang ( $p$ ) à partir duquel tous les termes de la suite dépassent  $A$ .
- 5 Comme  $A$  était un réel quelconque, ce raisonnement reste valable pour tout  $A$  : c'est exactement la définition de « tend vers  $+\infty$  ».

---

**Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ .**

---

## Vérification sur un exemple

La suite  $u_n = n^2$  est croissante et non majorée (pour tout  $A$ , il suffit de prendre  $n$  supérieur à  $\sqrt{A}$  pour dépasser  $A$ ).

Elle tend donc bien vers  $+\infty$ , conformément au théorème.

## L'erreur de raisonnement classique

Croire qu'il suffit qu'une suite soit croissante pour tendre vers  $+\infty$  : une suite croissante peut très bien être majorée (et donc converger) — c'est l'absence de majorant qui fait toute la différence.

# Démonstration : la limite de $(q^n)$ , après l'inégalité de Bernoulli

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Limite de  $(q^n)$ , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.**

*Une inégalité démontrée par récurrence, et toute la limite d'une suite géométrique s'en déduit.*

## Les mots à connaître

- **inégalité de Bernoulli** — Pour tout réel  $x$  strictement positif et tout entier naturel  $n$ ,  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

## Hypothèses et définitions

- Le principe de récurrence : initialisation, hérédité, conclusion.
- Le théorème de comparaison : une suite minorée par une suite qui tend vers  $+\infty$  tend elle-même vers  $+\infty$ .
- Tout réel  $q$  strictement supérieur à 1 s'écrit  $q = 1 + x$  avec  $x$  strictement positif.

## La démonstration

- 1 Je démontre d'abord, par récurrence, l'inégalité de Bernoulli : pour  $x$  réel strictement positif,  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  pour tout entier  $n$ .
- 2 Initialisation : au rang  $n = 0$ ,  $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \times x$  : l'inégalité est vraie.
- 3 Hérédité : je suppose  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ . Comme  $1 + x$  est strictement positif, je multiplie les deux membres par  $(1 + x)$  :  $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2$ . Comme  $nx^2 \geq 0$ , j'obtiens  $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$ .
- 4 Par récurrence, l'inégalité de Bernoulli est établie pour tout entier  $n$ .
- 5 Pour  $q$  strictement supérieur à 1, j'écris  $q = 1 + x$  ( $x > 0$ ) :  $q^n \geq 1 + nx$ , qui tend vers  $+\infty$  ; par comparaison,  $q^n$  tend vers  $+\infty$ .
- 6 Pour  $-1 < q < 1$  ( $q$  non nul), j'applique le même résultat à  $1/|q| = 1 + x$  ( $x > 0$ ) :  $1/|q|^n$  tend vers  $+\infty$ , donc  $|q|^n$ , donc  $q^n$ , tend vers 0.

**Pour  $q$  strictement supérieur à 1,  $q^n$  tend vers  $+\infty$ . Pour  $-1 < q < 1$ ,  $q^n$  tend vers 0.**

## Vérification sur un exemple

Pour  $q = 1,1 = 1 + 0,1$  : l'inégalité de Bernoulli donne  $1,1^{10} \geq 1 + 10 \times 0,1 = 2$ .

La valeur réelle, environ 2,594, confirme bien cette minoration, et illustre que  $1,1^n$  grandit sans borne.

## L'erreur de raisonnement classique

Multiplier l'inégalité de Bernoulli par  $(1 + x)$  sans avoir vérifié que ce facteur est strictement positif : si  $1 + x$  était négatif, multiplier les deux membres par ce facteur inverserait le sens de l'inégalité.

## Démonstration : divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$

### CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Divergence vers  $+\infty$  d'une suite minorée par une suite divergeant vers  $+\infty$ .**

*Rester toujours au-dessus d'une suite qui explose : voilà qui suffit à exploser soi-même.*

### Les mots à connaître

- **minorer** — Vérifier que  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n$  (ou à partir d'un certain rang) :  $(v_n)$  est alors une suite minorante de  $(u_n)$ .

### Hypothèses et définitions

- Une suite  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle  $[A ; +\infty[$  contient tous ses termes à partir d'un certain rang.
- Si  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n$  à partir d'un certain rang, une majoration sur  $(v_n)$  se transmet à  $(u_n)$ .

### La démonstration

- 1 Je fixe un réel  $A$  quelconque : je dois montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de  $(u_n)$  dépassent  $A$ .
- 2 Comme  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , il existe un rang  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $v_n > A$ .
- 3 Comme  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n$  (à partir d'un certain rang), j'obtiens, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq v_n > A$ .
- 4 J'ai donc trouvé un rang à partir duquel tous les termes de  $(u_n)$  dépassent  $A$ .
- 5 Comme  $A$  était quelconque,  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .

---

**Si  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n$  et que  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , alors  $(u_n)$  tend aussi vers  $+\infty$ .**

---

### Vérification sur un exemple

Pour  $u_n = n^2 + (-1)^n$  et  $v_n = n^2 - 1$ , on a  $u_n \geq v_n$  pour tout  $n$ .  
Comme  $v_n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $u_n$  tend elle aussi vers  $+\infty$ .

### L'erreur de raisonnement classique

Confondre minoration et majoration : c'est une MINORATION par une suite qui tend vers  $+\infty$  qui permet de conclure à la divergence vers  $+\infty$  — une majoration ne dirait rien du tout dans ce sens.

# Démonstration : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction exponentielle.**

*Étudier une simple différence entre l'exponentielle et une droite suffit à connaître son comportement aux deux bouts de la droite réelle.*

## Les mots à connaître

- **fonction auxiliaire** — Une fonction construite exprès (ici  $g(x) = e^x - x$ ) pour ramener un problème de limite à une étude de variations plus simple.

## Hypothèses et définitions

- La fonction exponentielle vérifie  $\exp' = \exp$  et est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .
- Une fonction dont la dérivée s'annule en changeant de signe admet un extremum en ce point.
- Le théorème de comparaison s'applique aussi aux fonctions : si  $f(x) \geq g(x)$  et que  $g$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f$  tend aussi vers  $+\infty$ .

## La démonstration

- 1 J'étudie la fonction auxiliaire  $g(x) = e^x - x$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $g'(x) = e^x - 1$ .
- 2 Le signe de  $g'$  : négatif pour  $x$  inférieur à 0 ( $e^x$  inférieur à 1), nul en  $x = 0$ , positif pour  $x$  supérieur à 0.  $g$  admet donc un minimum en  $x = 0$ .
- 3 Ce minimum vaut  $g(0) = e^0 - 0 = 1$ , strictement positif : donc  $g(x) \geq 1 > 0$  pour tout réel  $x$ , soit  $e^x > x$  pour tout réel  $x$ .
- 4 En  $+\infty$  : comme  $e^x > x$  et que  $x$  tend vers  $+\infty$ , le théorème de comparaison donne  $e^x$  tend vers  $+\infty$ .
- 5 En  $-\infty$  : je pose  $t = -x$ , qui tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . J'écris  $e^x = e^{-t} = 1/e^t$ . Comme  $e^t$  tend vers  $+\infty$ ,  $1/e^t$  tend vers 0.
- 6 Conclusion :  $e^x$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , et vers 0 en  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

## Vérification sur un exemple

Pour  $x = 20$  (grand),  $e^{20}$  vaut environ 485 millions : bien supérieur à 20, conformément à  $e^x > x$ .  
 Pour  $x = -20$ ,  $e^{-20} = 1/e^{20}$  est extrêmement proche de 0.

## L'erreur de raisonnement classique

Croire que l'exponentielle tend vers  $-\infty$  en  $-\infty$  : elle reste toujours strictement positive, sa limite en  $-\infty$  vaut 0, jamais  $-\infty$ .

# Démonstration : la croissance comparée de $x^n$ et de l'exponentielle en $+\infty$

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Croissance comparée de  $x \mapsto x^n$  et  $\exp$  en  $+\infty$ .**

Répéter le même argument, une fois par degré de puissance : c'est ainsi que l'exponentielle finit par écraser n'importe quelle puissance de  $x$ .

## Les mots à connaître

- **factorielle** — Pour un entier  $k$ ,  $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$  (et  $0! = 1$ ) : un nombre qui apparaît dans la minoration de l'exponentielle par les puissances de  $x$ .

## Hypothèses et définitions

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , et  $e^x > x$  pour tout réel  $x$  (démonstration précédente).
- Une fonction dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle  $y$  est strictement croissante.
- Le principe de récurrence : initialisation, hérédité, conclusion.

## La démonstration

- 1 Je démontre par récurrence sur  $n$  que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $e^x > x^{n+1} / (n+1)!$ .
- 2 Initialisation ( $n = 0$ ) : il s'agit de  $e^x > x$ , déjà établi dans la démonstration précédente.
- 3 Hérédité : je suppose  $e^x > x^{n+1} / (n+1)!$  pour tout  $x$  strictement positif. Je pose  $\varphi(x) = e^x - x^{n+2} / (n+2)!$ , de dérivée  $\varphi'(x) = e^x - x^{n+1} / (n+1)!$ , strictement positive sur  $]0; +\infty[$  par hypothèse de récurrence :  $\varphi$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .
- 4 Comme  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ , ce qui donne  $e^x > x^{n+2} / (n+2)!$  : l'hérédité est établie.
- 5 Par récurrence,  $e^x > x^{n+1} / (n+1)!$  pour tout entier  $n$  et tout  $x$  strictement positif.
- 6 J'en déduis, pour  $x$  strictement positif :  $x^n / e^x < (n+1)! / x$ , qui tend vers 0 en  $+\infty$  : donc  $x^n / e^x$  tend vers 0.

**Pour tout entier  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n / e^x = 0$  : en  $+\infty$ , l'exponentielle l'emporte toujours sur n'importe quelle puissance de  $x$ .**

## Vérification sur un exemple

Pour  $n = 3$ ,  $x^3 / e^x$  vaut environ 4,5 en  $x = 10$ , mais moins de 0,001 en  $x = 30$  : le quotient s'écrase bien vers 0.

## L'erreur de raisonnement classique

Croire que plus l'exposant  $n$  est grand, plus  $x^n$  « gagne » face à  $e^x$  : quel que soit  $n$ , aussi grand soit-il, l'exponentielle finit toujours par l'emporter en  $+\infty$ , seulement à partir d'un  $x$  d'autant plus grand que  $n$  est grand.

# Démonstration : si $f''$ est positive, alors la courbe de $f$ est au-dessus de ses tangentes

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Si  $f''$  est positive, alors la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de ses tangentes.**

*Comparer  $f$  à sa propre tangente revient à étudier une simple différence : sa dérivée première suffit à montrer qu'elle ne peut jamais devenir négative.*

## Les mots à connaître

- **fonction différence** — Ici,  $g(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$  : l'écart entre la courbe de  $f$  et sa tangente au point d'abscisse  $a$ .

## Hypothèses et définitions

- La tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
- Si  $f''$  est positive sur un intervalle, alors  $f'$  y est croissante.
- Une fonction qui décroît puis croît admet un minimum au point où sa dérivée s'annule en changeant de signe.

## La démonstration

- 1 Je fixe un réel  $a$  de l'intervalle, et je note  $T$  la tangente à la courbe de  $f$  en  $a$ , d'équation  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
- 2 Je pose  $g(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$  : l'écart entre  $f$  et sa tangente  $T$ . Je veux montrer que  $g(x)$  est positif ou nul pour tout  $x$ .
- 3 Je calcule  $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ . Comme  $f''$  est positive,  $f'$  est croissante, donc  $g'(x)$  est négatif pour  $x$  inférieur à  $a$ , nul en  $a$ , positif pour  $x$  supérieur à  $a$ .
- 4  $g$  décroît donc jusqu'en  $a$ , puis croît :  $g$  admet un minimum en  $x = a$ , et ce minimum vaut  $g(a) = f(a) - (f(a) + f'(a) \times 0) = 0$ .
- 5 Comme le minimum de  $g$  vaut  $0$ ,  $g(x)$  est positif ou nul pour tout  $x$ , soit  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$  : la courbe de  $f$  est au-dessus de sa tangente en  $a$ .
- 6 Comme  $a$  était quelconque dans l'intervalle, la courbe de  $f$  est au-dessus de TOUTES ses tangentes.

---

**Si  $f''$  est positive sur un intervalle, la courbe représentative de  $f$  y est au-dessus de chacune de ses tangentes.**

---

## Démonstration : si $f''$ est positive, alors la courbe de $f$ est au-dessus de ses tangentes — la vérification

### Vérification sur un exemple

Pour  $f(x) = x^2$ ,  $f''(x) = 2$ , toujours positive :  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

Sa tangente en  $x = 1$  a pour équation  $y = 2x - 1$  ; en  $x = 2$ , la tangente vaut 3, tandis que  $f(2) = 4$  : la courbe est bien au-dessus.

### L'erreur de raisonnement classique

Oublier d'ajouter  $f(a)$  dans l'équation de la fonction différence  $g$ , ou confondre le signe de  $g'$  (qui donne les variations de  $g$ ) avec le signe de  $g$  lui-même (qui donne la position par rapport à la tangente) : ce sont deux étapes distinctes du raisonnement.

# Démonstration : la dérivée de la fonction logarithme népérien

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.**

*ln et exp sont réciproques : dériver l'identité qui les relie suffit à trouver la dérivée de ln, sans repartir d'un taux de variation.*

## Les mots à connaître

- **dérivée d'une composée** — Pour deux fonctions dérivables  $v$  et  $u$ ,  $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$  : on dérive la fonction extérieure, évaluée en  $u$ , puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur.

## Hypothèses et définitions

- ln et exp sont réciproques :  $e^{\ln(x)} = x$  pour tout réel  $x$  strictement positif.
- La dérivabilité de ln sur  $]0 ; +\infty[$  est ADMISE (elle n'est pas démontrée ici).
- La fonction exponentielle vérifie  $\exp' = \exp$ .

## La démonstration

- 1 Je pars de l'égalité  $e^{\ln(x)} = x$ , vraie pour tout  $x$  strictement positif.
- 2 Je dérive les deux membres de cette égalité par rapport à  $x$ , en admettant que ln est dérivable.
- 3 Le membre de droite se dérive en 1. Le membre de gauche est une composée : je pose  $u(x) = \ln(x)$ , et je dérive  $e^u$  avec la formule de la dérivée d'une composée :  $(e^{\ln(x)})' = \ln'(x) \times e^{\ln(x)}$ .
- 4 Comme  $e^{\ln(x)} = x$ , j'obtiens  $\ln'(x) \times x = 1$ .
- 5 J'en déduis  $\ln'(x) = 1/x$ , pour tout  $x$  strictement positif.

**La fonction dérivée du logarithme népérien est  $\ln'(x) = 1/x$  sur  $]0 ; +\infty[$ .**

## Vérification sur un exemple

En  $x = 2$  :  $\ln'(2) = 1/2$ .

La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 2 a donc pour coefficient directeur 1/2.

## L'erreur de raisonnement classique

Dériver  $e^{\ln(x)}$  en oubliant qu'il s'agit d'une composée, et écrire directement 1 au lieu de  $\ln'(x)$   $\times e^{\ln(x)}$  : c'est exactement cette dérivation de la composée qui fait apparaître  $\ln'(x)$  dans le calcul.

# Démonstration : la limite en 0 de la fonction $x \ln(x)$

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Limite en 0 de  $x \mapsto x \ln(x)$ .**

*$x$  tend vers 0 pendant que  $\ln(x)$  tend vers  $-\infty$  : un changement de variable transforme cette forme indéterminée en une croissance comparée déjà connue.*

## Les mots à connaître

- **changement de variable** — Remplacer  $x$  par une nouvelle variable (ici  $X = 1/x$ ) pour ramener une limite à une forme déjà connue.

## Hypothèses et définitions

- Quand  $x$  tend vers 0 ( $x$  strictement positif),  $X = 1/x$  tend vers  $+\infty$ .
- Croissance comparée déjà établie :  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X)/X = 0$ .
- Propriété algébrique :  $\ln(1/x) = -\ln(x)$ .

## La démonstration

- 1 Je pose le changement de variable  $X = 1/x$  : quand  $x$  tend vers 0 ( $x > 0$ ),  $X$  tend vers  $+\infty$ , et  $x = 1/X$ .
- 2 J'exprime  $x \ln(x)$  avec cette nouvelle variable :  $x \ln(x) = (1/X) \times \ln(1/X)$ .
- 3 J'utilise la propriété algébrique  $\ln(1/X) = -\ln(X)$  :  $x \ln(x) = (1/X) \times (-\ln(X)) = -\ln(X)/X$ .
- 4 Par croissance comparée,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X)/X = 0$ , donc  $\lim_{X \rightarrow +\infty} (-\ln(X)/X) = 0$ .
- 5 Comme  $X$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0, je conclus  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ .

---

**$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$  ( $x$  strictement positif) :  $x$  écrase la divergence de  $\ln(x)$  vers  $-\infty$ .**

---

## Vérification sur un exemple

Pour  $x = 0,001$  :  $x \ln(x) \approx 0,001 \times (-6,908) \approx -0,0069$ , déjà très proche de 0.  
Plus  $x$  se rapproche de 0, plus  $x \ln(x)$  se rapproche de 0, malgré la divergence de  $\ln(x)$ .

## L'erreur de raisonnement classique

Croire que la limite de  $x \ln(x)$  en 0 est  $-\infty$  ou n'existe pas, en s'arrêtant à l'observation que  $\ln(x)$  diverge : c'est justement le rôle du changement de variable de montrer que  $x$  « gagne » sur cette divergence.

# Démonstration : deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.**

*Deux fonctions qui ont la même dérivée partout sur un intervalle ne peuvent différer que d'un décalage constant.*

## Les mots à connaître

- **fonction constante** — Une fonction dont la dérivée est nulle sur tout un intervalle est nécessairement constante sur cet intervalle (résultat admis, lié au sens de variation).

## Hypothèses et définitions

· Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.

·  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur  $I$  signifie  $F' = f$  et  $G' = f$  sur  $I$ .

## La démonstration

- 1 Je suppose que  $F$  et  $G$  sont deux primitives d'une même fonction  $f$ , continue sur un intervalle  $I$  :  $F' = f$  et  $G' = f$  sur  $I$ .
- 2 Je pose la fonction différence  $h = F - G$ , définie et dérivable sur  $I$ .
- 3 Je calcule sa dérivée :  $h' = F' - G' = f - f = 0$  sur tout l'intervalle  $I$ .
- 4 Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle : il existe donc un réel  $k$  tel que  $h(x) = k$  pour tout  $x$  de  $I$ .
- 5 J'en déduis  $F(x) - G(x) = k$ , soit  $F(x) = G(x) + k$  :  $F$  et  $G$  diffèrent bien d'une constante.

**Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors il existe un réel  $k$  tel que  $F = G + k$  sur  $I$ .**

## Vérification sur un exemple

$F(x) = x^3$  et  $G(x) = x^3 + 5$  sont toutes deux des primitives de  $f(x) = 3x^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

Leur différence  $F(x) - G(x) = -5$  est bien constante.

## L'erreur de raisonnement classique

Croire qu'une fonction continue n'a qu'une seule primitive : elle en a une infinité, toutes obtenues en ajoutant une constante à l'une d'entre elles.

# Démonstration : résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a$  est un nombre réel.

Vérifier qu'une famille de fonctions est solution est facile ; montrer qu'il n'y en a pas d'autre demande un argument de plus, en multipliant par une exponentielle bien choisie.

## Les mots à connaître

- **fonction auxiliaire** — Une fonction construite exprès (ici  $\varphi(x) = y(x)e^{-ax}$ ) pour transformer le problème en une étude de dérivée nulle, plus simple.

## Hypothèses et définitions

- La fonction exponentielle vérifie  $\exp' = \exp$  et n'est jamais nulle.
- Une fonction dont la dérivée est nulle sur  $\mathbb{R}$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .
- La dérivée d'un produit :  $(uv)' = u'v + uv'$ .

## La démonstration

- 1 Je vérifie d'abord que, pour tout réel  $C$ , la fonction  $y(x) = Ce^{ax}$  est solution de  $y' = ay$  :  $y'(x) = Ca \times e^{ax} = a \times y(x)$ . C'est bien vérifié.
- 2 Je montre maintenant qu'il n'y a pas d'autre solution. Soit  $y$  une solution quelconque de  $y' = ay$ . Je pose la fonction auxiliaire  $\varphi(x) = y(x) \times e^{-ax}$ .
- 3 Je dérive  $\varphi$ , comme un produit :  $\varphi'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x) \times (-a)e^{-ax} = (y'(x) - a \times y(x)) \times e^{-ax}$ .
- 4 Comme  $y$  est solution de  $y' = ay$ , j'ai  $y'(x) - a \times y(x) = 0$ , donc  $\varphi'(x) = 0$  pour tout réel  $x$ .
- 5  $\varphi$  a une dérivée nulle sur  $\mathbb{R}$  : elle est donc constante, égale à un certain réel  $C$ . J'obtiens  $y(x) \times e^{-ax} = C$ , soit  $y(x) = Ce^{ax}$ .
- 6 Toute solution de  $y' = ay$  est bien de la forme  $Ce^{ax}$  : ce sont exactement les solutions trouvées à la première étape.

**Les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  ( $a$  réel) sont exactement les fonctions  $x \mapsto Ce^{ax}$ , où  $C$  est une constante réelle quelconque.**

## Démonstration : résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ — la vérification

### Vérification sur un exemple

Pour  $a = -2$  et une condition initiale  $y(0) = 5$  : la solution est  $y(x) = 5e^{-2x}$ .

Vérification :  $y'(x) = -10e^{-2x} = -2 \times 5e^{-2x} = -2y(x)$ .

### L'erreur de raisonnement classique

Vérifier seulement que  $Ce^{ax}$  est solution, sans démontrer que ce sont les SEULES solutions : c'est tout l'intérêt de la fonction auxiliaire  $\varphi(x) = y(x)e^{-ax}$ , dont la dérivée nulle prouve l'unicité de la forme.

# Démonstration : le lien entre intégrale et primitive

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Pour une fonction positive croissante  $f$  sur  $[a,b]$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$ . Pour toute primitive  $F$  de  $f$ , relation  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .**

*L'aire accumulée depuis  $a$  jusqu'à  $x$ , prise comme fonction de  $x$ , se révèle être une primitive de  $f$  : voilà pourquoi une seule primitive suffit à calculer toute intégrale.*

## Les mots à connaître

- **taux de variation** — Pour une fonction  $G$ , le quotient  $(G(x+h) - G(x)) / h$  : sa limite quand  $h$  tend vers  $0$  est  $G'(x)$ .

## Hypothèses et définitions

- $f$  est positive et croissante sur  $[a ; b]$ .
- Pour  $f$  positive et croissante,  $\int_x^{x+h} f(t) dt$  ( $h > 0$  petit) représente l'aire d'une bande verticale, encadrée par les rectangles de hauteurs  $f(x)$  et  $f(x+h)$ .
- Si une fonction  $G$  vérifie  $\lim_{h \rightarrow 0} (G(x+h) - G(x))/h = f(x)$  pour tout  $x$ , alors  $G' = f$ .

## La démonstration

- 1 Je définis  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ , l'aire accumulée entre  $a$  et  $x$ , pour  $x$  dans  $[a ; b]$ .
- 2 Pour  $h > 0$  petit,  $G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$  est l'aire de la bande entre  $x$  et  $x+h$ .
- 3 Comme  $f$  est croissante sur cette bande, cette aire est encadrée par les deux rectangles de largeur  $h$  :  $h \times f(x) \leq G(x+h) - G(x) \leq h \times f(x+h)$ .
- 4 En divisant par  $h$  (positif) :  $f(x) \leq (G(x+h) - G(x))/h \leq f(x+h)$ .
- 5 Quand  $h$  tend vers  $0$ ,  $f(x+h)$  tend vers  $f(x)$  ( $f$  continue, car croissante), donc le taux de variation de  $G$  est encadré par deux quantités qui tendent vers  $f(x)$  : par le théorème des gendarmes,  $G'(x) = f(x)$ .
- 6  $G$  est donc une primitive de  $f$ . Pour toute AUTRE primitive  $F$  de  $f$ ,  $F$  et  $G$  diffèrent d'une constante  $k$  :  $F(x) = G(x) + k$ . En  $x = a$ ,  $G(a) = 0$ , donc  $k = F(a)$ . En  $x = b$  :  $F(b) = G(b) + F(a)$ , soit  $\int_a^b f(x) dx = G(b) = F(b) - F(a)$ .

**Pour  $f$  positive croissante sur  $[a ; b]$ ,  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$ , et pour toute primitive  $F$  de  $f$ ,  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .**

## Vérification sur un exemple

Pour  $f(x) = x^2$  sur  $[0 ; 3]$ , une primitive est  $F(x) = x^3/3$ .  
 $\int_0^3 x^2 dx = F(3) - F(0) = 27/3 - 0 = 9$ .

## L'erreur de raisonnement classique

Croire que le résultat ne vaut que pour LA primitive particulière  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  : la relation  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  reste vraie pour N'IMPORTE QUELLE primitive  $F$  de  $f$ , puisque toutes diffèrent d'une constante qui s'annule dans la différence  $F(b) - F(a)$ .

# Démonstration : la formule d'intégration par parties

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

### Intégration par parties.

La dérivée d'un produit, intégrée entre deux bornes, se réarrange en une formule qui transforme une intégrale difficile en une autre, plus simple.

### Les mots à connaître

- **intégration par parties** — La formule  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ , utile quand la seconde intégrale est plus simple que la première.

### Hypothèses et définitions

- Pour  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables, à dérivées continues, sur  $[a ; b]$  :  $(uv)' = u'v + uv'$ .
- La relation entre intégrale et primitive :  $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a) = [g(x)]_a^b$ , pour  $g$  de dérivée continue.

### La démonstration

- 1 Je pars de la formule de dérivation d'un produit :  $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ , valable pour tout  $x$  de  $[a ; b]$ .
- 2 J'intègre les deux membres de cette égalité entre  $a$  et  $b$  :  $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ .
- 3 Le membre de gauche se calcule directement, car  $uv$  est une primitive de  $(uv)'$  :  $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$ .
- 4 J'obtiens donc  $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ .
- 5 En isolant l'intégrale de  $u(x)v'(x)$ , j'obtiens la formule d'intégration par parties :  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ .

---

**Pour  $u$  et  $v$  dérivables à dérivées continues sur  $[a ; b]$  :  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ .**

---

### Vérification sur un exemple

Pour  $\int_0^1 x e^x dx$ , je pose  $u(x) = x$  et  $v'(x) = e^x$ , donc  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = e^x$ .  
 $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1 \times e^1 - 0) - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$ .

### L'erreur de raisonnement classique

Choisir  $u$  et  $v'$  au hasard : un mauvais choix (par exemple  $u(x) = e^x$  et  $v'(x) = x$  pour  $\int x e^x dx$ ) complique l'intégrale au lieu de la simplifier. Le bon choix rend  $u'$  plus simple que  $u$ , ou  $v$  plus simple à calculer que  $v'$ .

# Démonstration : la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.**

*Compter les chemins d'un arbre qui mènent au même nombre de succès, puis multiplier par leur probabilité commune : voilà toute la formule de la loi binomiale, démontrée d'un seul geste de dénombrement.*

## Les mots à connaître

- **chemin de l'arbre** — Une suite de branches, du sommet à une feuille, représentant une issue précise du schéma de Bernoulli (un ordre déterminé de succès et d'échecs).
- **coefficient binomial** — Le nombre  $\binom{n}{k}$  de façons de choisir k rangs (les rangs des succès) parmi n rangs disponibles — dit « k parmi n ».

## Hypothèses et définitions

- Dans un schéma de Bernoulli de n épreuves indépendantes et identiques de paramètre p, chaque épreuve est un succès (probabilité p) ou un échec (probabilité 1 – p).
- Par le modèle de la succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue précise est le produit des probabilités de ses composantes.
- Le nombre de chemins de l'arbre à k succès parmi n épreuves est le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ .

## La démonstration

- 1 Je considère un schéma de Bernoulli de n épreuves indépendantes et identiques, de paramètre p, et je note X le nombre de succès obtenus.
- 2 Une issue précise à exactement k succès (et n – k échecs, dans un ordre donné) a pour probabilité  $p^k \times (1 - p)^{n-k}$ , par indépendance des épreuves.
- 3 Cette probabilité est la MÊME pour toute issue comportant k succès, quel que soit l'ordre dans lequel ils apparaissent : seul le NOMBRE de succès change la probabilité, jamais leur position.
- 4 Je dénombre le nombre de chemins de l'arbre menant à exactement k succès : c'est le nombre de façons de choisir les k rangs où le succès apparaît parmi les n rangs disponibles, soit  $\binom{n}{k}$  chemins.
- 5  $P(X = k)$  est la somme des probabilités de tous ces chemins, chacun de même probabilité  $p^k(1 - p)^{n-k}$  : je multiplie donc cette probabilité par le nombre de chemins.
- 6 J'obtiens  $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$ .

---


$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n.$$


---

## Démonstration : la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli — la vérification

### Vérification sur un exemple

Vérifions la formule sur  $\mathcal{B}(3 ; 1/2)$ , en calculant les quatre valeurs possibles de  $X$ .

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \times (1/2)^0 \times (1/2)^3 = 1 \times 1 \times 1/8 = 1/8.$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times (1/2)^1 \times (1/2)^2 = 3 \times 1/2 \times 1/4 = 3/8.$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times (1/2)^2 \times (1/2)^1 = 3 \times 1/4 \times 1/2 = 3/8.$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \times (1/2)^3 \times (1/2)^0 = 1 \times 1/8 \times 1 = 1/8.$$

La somme des quatre probabilités vaut  $1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$ , comme il se doit pour une loi de probabilité complète.

### L'erreur de raisonnement classique

Oublier le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  et écrire seulement  $p^k(1 - p)^{n-k}$  : cette expression ne compte qu'UN SEUL chemin de l'arbre, alors qu'il en existe  $\binom{n}{k}$  qui mènent tous au même nombre  $k$  de succès.

# Démonstration : espérance et variance de la loi binomiale

## CE QUE LE PROGRAMME DEMANDE DE DÉMONTRER

**Espérance et variance de la loi binomiale.**

*Décomposer le nombre total de succès en une somme de petits « 0 ou 1 » indépendants : la linéarité de l'espérance et l'additivité de la variance font le reste du travail.*

## Les mots à connaître

- **variable de Bernoulli** — Une variable aléatoire  $X_i$  qui vaut 1 si la  $i$ -ième épreuve est un succès, 0 sinon ; elle suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , avec  $E(X_i) = p$  et  $V(X_i) = p(1 - p)$ .

## Hypothèses et définitions

- $X$ , le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, se représente comme la somme  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes, de même paramètre  $p$ .
- La linéarité de l'espérance est TOUJOURS vraie, même sans indépendance :  $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$ .
- L'additivité de la variance, elle, exige l'indépendance des variables sommées :  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$  seulement parce que les épreuves du schéma de Bernoulli sont indépendantes.

## La démonstration

- 1 Je modélise  $X$ , le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de  $n$  épreuves indépendantes de paramètre  $p$ , comme la somme  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .
- 2 Chaque  $X_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  :  $E(X_i) = p$  et  $V(X_i) = p(1 - p)$ , résultats déjà connus de la classe de première.
- 3 Par linéarité de l'espérance, valable même sans indépendance :  $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n \times p$ .
- 4 Les variables  $X_1, \dots, X_n$  étant INDÉPENDANTES (hypothèse du schéma de Bernoulli), la variance de leur somme est la somme de leurs variances :  $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = n \times p(1 - p)$ .
- 5 J'en déduis l'écart type :  $\sigma(X) = \sqrt{n \times p(1 - p)}$ .

---

**Pour  $X$  suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n ; p)$  :  $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1 - p)$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$ .**

---

## Démonstration : espérance et variance de la loi binomiale — la vérification

### Vérification sur un exemple

Vérifions la formule sur  $\mathcal{B}(3 ; 1/2)$ , en repartant de sa loi de probabilité :  $P(X = 0) = 1/8$ ,  $P(X = 1) = 3/8$ ,  $P(X = 2) = 3/8$ ,  $P(X = 3) = 1/8$ .

Calcul direct de l'espérance :  $E(X) = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 12/8 = 3/2$ .

La formule donne  $n \times p = 3 \times 1/2 = 3/2$  : les deux calculs coïncident.

Calcul direct de  $E(X^2)$  :  $E(X^2) = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 4 \times 3/8 + 9 \times 1/8 = 24/8 = 3$ , d'où  $V(X) = 3 - (3/2)^2 = 3 - 9/4 = 3/4$ .

La formule donne  $n \times p \times (1 - p) = 3 \times 1/2 \times 1/2 = 3/4$  : les deux calculs coïncident encore.

### L'erreur de raisonnement classique

Additionner les variances  $V(X_i)$  SANS vérifier leur indépendance : cette étape n'est valable QUE parce que les épreuves du schéma de Bernoulli sont indépendantes — pour l'espérance, à l'inverse, la linéarité ne demande AUCUNE indépendance.

# Le grand bilan

Toutes les étapes se mélangent : entoure la bonne réponse. Pas d'exemple cette fois — tu connais le geste.

1. De combien de façons peut-on ranger 5 livres différents côte à côte sur une étagère ?

120   1   32   20

2. Quelle est la limite de  $\ln(x)$  quand  $x$  tend vers 0, avec  $x$  strictement positif ?

0    $+\infty$     $-\infty$    Elle n'existe pas

3. Quelle est la limite de  $x^3 \times e^{-x}$  (où  $e^{-x}$  désigne l'exponentielle de  $-x$ ) quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

1   0    $-\infty$     $+\infty$

4. Quelle est la limite de  $x \times e^x$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ?

$+\infty$    1    $-\infty$    0

5. On donne  $E(X) = 3$  et  $E(Y) = 5$ . Quelle est la valeur de  $E(X + Y)$  ?

3   2   15   8

6.  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(2 ; -3 ; 6)$  dans une base orthonormée. Que vaut  $\|\vec{u}\|$  ?

5   49    $\sqrt{13}$    7

7. Quelle est la limite de  $\ln(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

0    $-\infty$    1    $+\infty$

8. On définit  $f(x) = 2x$ . Laquelle de ces fonctions est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ?

$F(x) = 2$     $F(x) = x^3$     $F(x) = x^2 - x$

$F(x) = x^2 + 3$

9. Quelle est la limite de  $f(x) = -3x + 5$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ?

$-\infty$    5   0    $+\infty$

10. Quelle est la limite de  $f(x) = (2x^2 + 1) / (x^2 + 3)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

0   2    $+\infty$    1

11. On sait que  $({}^{10}_3) = 120$ . Que vaut  $({}^{10}_7)$  sans nouveau calcul ?

120   240   10   1

12. Sans aucun calcul, que vaut  $({}^{15}_0)$ , le nombre de façons de choisir 0 élément parmi 15 ?

1   1 307 674 368 000   15   0

13. On définit  $u_n = 5 - 2/n$  pour  $n \geq 1$ . Quelle est la limite de  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

0   -2    $+\infty$    5

14. Quelle est la fonction dérivée de  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$  ?

$-\cos$     $\cos$     $-\sin$     $\sin$

15. Quelle est la valeur moyenne de  $f(x) = x^2$  sur  $]0 ; 3[$  ?

3 1 9 1/3

16. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\ln(2x - 1) \leq 0$  ?

$]-\infty ; 1]$   $[0 ; 1]$   $]1/2 ; +\infty[$   $]1/2 ; 1]$

17. Le plan P a pour équation cartésienne  $2x - y + 3z - 5 = 0$ . Quel vecteur est normal à P ?

(2 ; 1 ; 3) (2 ; -1 ; 3) (1 ; 2 ; 0)  
(5 ; -1 ; 3)

18. Quelle est la fonction dérivée de  $\ln(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$  ?

1/x  $x^2$   
x -1/x

19. Avec la variance 4 trouvée pour cet échantillon, quel est son écart type ?

4 2 16 0,5

20. Avec  $V(X) = 2,55$ , quelle est une valeur approchée au centième de l'écart type  $\sigma(X)$  ?

6,5 3 1,6 2,55

21. Quelle est une primitive de  $f(x) = e^{2x}$  (où  $e^{2x}$  désigne l'exponentielle de  $2x$ ) sur  $\mathbb{R}$  ?

$F(x) = e^{2x}$   $F(x) = 2e^{2x}$   $F(x) = (1/2)e^{2x}$   
 $F(x) = (1/2)xe^{2x}$

22. A(1 ; 2 ; -1) et B(3 ; -2 ; 5). Quel vecteur est un vecteur directeur de la droite (AB) ?

(2 ; 4 ; 6) (2 ; 0 ; 2) (4 ; 0 ; 4)  
(2 ; -4 ; 6)

23. Quelle est la valeur de  $\ln(e^4)$  (où  $e^4$  désigne l'exponentielle de 4) ?

$e^4$  0 1/4 4

24. X suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(6 ; 1/2)$ . Quelle est la valeur de  $P(X \geq 4)$  ?

15/64 11/32 3/32 1/2

25. Que vaut  $\binom{6}{2}$ , le nombre de façons de choisir 2 éléments parmi 6 ?

30 12 15 3

26. Quelle est la limite de  $x \ln(x)$  quand  $x$  tend vers 0, avec  $x$  strictement positif ?

$+\infty$  1  $-\infty$  0

27. Quelle est la limite de  $\ln(x) / x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

$+\infty$  0 1  $-\infty$

28. Quelle est une primitive de  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  sur  $]0 ; +\infty[$  ?

$F(x) = \sqrt{x}/2$   $F(x) = 1/(2\sqrt{x})$   $F(x) = \sqrt{x}$   
 $F(x) = 2\sqrt{x}$

## Mon bilan

Tu as travaillé **24 méthodes** et répondu à **193 questions**, entourées puis démontrées. Regarde la page « Mes médailles » : compte tes « or ». Plus tu en as, plus tu sais non seulement répondre, mais dire POURQUOI — c'est ça, la démonstration.

MON COACH DE MATHS

# Diplôme de Tle

décerné à

.....

qui a terminé les 24 étapes du cahier d'activités de Tle



Fait le .....

Signature .....

# Les corrigés

« Entoure » : le premier numéro de chaque exercice est l'exemple « Regarde », il n'est pas compté ; les réponses suivent dans l'ordre. « Je démontre » : ta rédaction peut différer, ce qui compte est que chaque étape soit justifiée et le résultat encadré.

## Étape 1 • Dénombrement : principes additif et multiplicatif

**Entoure : 12 • 64 • 32 • 120 • 120 • 32 • 24**

**Je démontre :**

**1. Un menu se compose d'une entrée parmi 4 et d'un dessert parmi 3 (un choix de chaque catégorie). Combien de menus (entrée, dessert) peut-on composer ?**

1. Composer un menu, c'est choisir un couple (entrée, dessert) dans le produit cartésien des deux ensembles : par le principe multiplicatif, le nombre de couples est le produit des deux effectifs.

2.  $4 \times 3 = 12$

---

**On peut composer 12 menus différents.**

---

**2. Avec un alphabet de 4 lettres, combien de mots de 3 lettres peut-on former, les répétitions étant autorisées ?**

1. Un mot de 3 lettres est un 3-uplet d'éléments d'un ensemble à 4 éléments : chacune des 3 positions se remplit indépendamment, avec 4 choix possibles (les répétitions sont autorisées).

2.  $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

---

**On peut former 64 mots de 3 lettres.**

---

**3. Un ensemble E possède 5 éléments. Combien de parties (sous-ensembles) possède E, en comptant l'ensemble vide et E lui-même ?**

1. Une partie de E se construit en décidant, pour chacun des 5 éléments, s'il en fait partie ou non : 2 choix indépendants par élément, ce qui correspond au nombre de 5-uplets de  $\{0, 1\}$  (« en faire partie » ou « pas en faire partie »).

2.  $2^5 = 32$

---

**E possède 32 parties.**

---

## Étape 2 · Permutations, combinaisons et triangle de Pascal

Entoure : 336 · 210 · 1 · 7 · 15 · 120 · 10

Je démontre :

**1. Un jury de 8 candidats doit élire un président, un secrétaire et un trésorier (une même personne ne peut cumuler deux postes). Combien de compositions du bureau sont possibles ?**

1. Les trois postes sont DISTINCTS (président  $\neq$  secrétaire  $\neq$  trésorier) : il s'agit d'un 3-uplet de personnes distinctes parmi 8, donc de l'ordre  $8 \times 7 \times 6$ , et non d'une combinaison —  $56 = \binom{8}{3}$  compterait seulement les GROUPES de 3 candidats, sans distinguer les postes.

2.  $8 \times 7 \times 6 = 336$

---

**336 compositions du bureau sont possibles.**

---

**2. On choisit une équipe de 4 joueurs parmi 10 pour un match amical, l'ordre du choix n'ayant pas d'importance. Combien d'équipes différentes peut-on former ?**

1. Une équipe est une PARTIE à 4 éléments d'un ensemble à 10 éléments, sans ordre entre les joueurs : c'est le nombre de combinaisons  $\binom{10}{4}$ , et non le nombre de 4-uplets ordonnés (5 040), qui compterait chaque équipe plusieurs fois selon l'ordre du choix.

2.  $\binom{10}{4} = 10! / (4!(10 - 4)!) = 210$

---

**On peut former 210 équipes différentes.**

---

**3. Sans aucun calcul, que vaut  $\binom{15}{0}$ , le nombre de façons de choisir 0 élément parmi 15 ?**

1. Il n'y a qu'une seule façon de choisir 0 élément : ne rien choisir. Le programme l'explique :  $\binom{n}{0} = 1$  pour tout entier  $n$ .

---

**$\binom{15}{0} = 1$ .**

---

### Étape 3 · Vecteurs de l'espace

Entoure :  $(-13 ; 11 ; -6) \cdot -5 \cdot (3 ; -2 ; 5)$  · Oui, car  $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$  · Non, car la troisième coordonnée ne respecte pas la même proportionnalité que les deux premières · Oui, car  $2\vec{u} - 3\vec{v} = (2 ; -3 ; 7) = \vec{w}$  · Oui, car aucun n'est combinaison linéaire des deux autres

Je démontre :

1.  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(3 ; -1 ; 2)$  et  $\vec{v}$  a pour coordonnées  $(-2 ; 4 ; 0)$ . Quelles sont les coordonnées de  $-3\vec{u} + 2\vec{v}$  ?

- Je calcule chaque terme séparément, coordonnée par coordonnée :  $-3\vec{u}$  a pour coordonnées  $(-9 ; 3 ; -6)$ , et  $2\vec{v}$  a pour coordonnées  $(-4 ; 8 ; 0)$ .
- $(-9 + (-4) ; 3 + 8 ; -6 + 0)$

---

**$-3\vec{u} + 2\vec{v}$  a pour coordonnées  $(-13 ; 11 ; -6)$ .**

---

2.  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(4 ; -6 ; 10)$  et  $\vec{v}$  a pour coordonnées  $(-2 ; 3 ; k)$ . Pour quelle valeur de  $k$   $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils colinéaires ?

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel  $t$  tel que  $\vec{u} = t \times \vec{v}$  : ici,  $4 = t \times (-2)$  et  $-6 = t \times 3$  donnent tous les deux  $t = -2$ .
- La troisième coordonnée doit vérifier la MÊME proportionnalité :  $10 = -2 \times k$ .

---

**$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires pour  $k = -5$ .**

---

3. Dans une base  $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$  de l'espace, un vecteur  $\vec{w}$  vérifie  $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Quelles sont les coordonnées de  $\vec{w}$  dans cette base ?

- Par définition, décomposer  $\vec{w}$  sur la base  $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$  revient à lire, dans l'ordre, les coefficients devant  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  puis  $\vec{k}$  : ce sont exactement les coordonnées de  $\vec{w}$  dans cette base.

---

**$\vec{w}$  a pour coordonnées  $(3 ; -2 ; 5)$  dans cette base.**

---

### Étape 4 · Droites et plans de l'espace

Entoure : d1 et d2 sont strictement parallèles, car leurs vecteurs directeurs sont colinéaires · d est strictement parallèle à P, car  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$  · Ils sont strictement parallèles · Non, car  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires · d1 et d2 sont sécantes en A, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires · Oui, car aucun n'est combinaison linéaire des deux autres · d est strictement parallèle à P

Je démontre :

1. d1 a pour vecteur directeur  $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$  et d2, non confondue avec d1, a pour vecteur directeur  $\vec{v}(-4 ; 2 ; -6)$ . Que peut-on dire de d1 et d2 ?

1.  $\vec{v} = -2 \times \vec{u}$  : les deux vecteurs directeurs sont colinéaires, donc d1 et d2 ont la même direction — elles sont parallèles, et strictement (pas confondues, par hypothèse).
2. Leur produit scalaire n'est pas nul :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-4) + (-1) \times 2 + 3 \times (-6) = -8 - 2 - 18 = -28 \neq 0$ , donc d1 et d2 ne sont pas orthogonales — colinéaire et orthogonal sont deux notions différentes.

---

**d1 et d2 sont strictement parallèles.**

---

2. Un plan P est dirigé par  $\vec{a}(1 ; 0 ; 1)$  et  $\vec{b}(0 ; 1 ; -1)$ . Une droite d, non incluse dans P, a pour vecteur directeur  $\vec{u}(1 ; 1 ; 0)$ . Que peut-on dire de la position relative de d et P ?

1. d est parallèle à P si et seulement si son vecteur directeur appartient à la direction de P, c'est-à-dire s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  — pas nécessairement colinéaire à l'un des deux pris séparément.
2.  $(1 ; 0 ; 1) + (0 ; 1 ; -1) = (1 ; 1 ; 0) = \vec{u}$
3.  $\vec{u}$  est bien combinaison linéaire de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  : d est parallèle à P, et strictement puisque d n'est pas incluse dans P.

---

**d est strictement parallèle à P.**

---

3. Deux plans de l'espace sont chacun définis par un point et un couple de vecteurs non colinéaires qui les dirigent. Les deux couples de vecteurs directeurs engendrent exactement la même direction, mais les deux plans ne passent pas par les mêmes points. Que peut-on affirmer sur ces deux plans ?

1. Deux plans qui ont la même direction (les vecteurs qui les dirigent engendrent le même plan vectoriel) sont parallèles.
2. Ici, comme ils ne passent pas par les mêmes points, ils ne peuvent pas être confondus : ils sont donc STRICTEMENT parallèles — avoir la même direction ne suffit pas à conclure que deux plans sont confondus, il faut aussi qu'ils partagent au moins un point.

---

**Les deux plans sont strictement parallèles.**

---

## Étape 5 • Produit scalaire dans l'espace

Entoure :  $7 \cdot 1 \cdot (2; -1; 3) \cdot (0; 3; -2) \cdot 1$  • Oui, car  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot 29$

Je démontre :

1.  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(2; -3; 6)$  dans une base orthonormée. Que vaut  $\|\vec{u}\|$  ?

1. En base orthonormée,  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , car  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ .
2.  $\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$
3. Oublier le terme en z donnerait  $\sqrt{13}$ , comme si  $\vec{u}$  était un vecteur du plan.

---


$$\|\vec{u}\| = 7.$$


---

2.  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(3; -2; 4)$  et  $\vec{v}$  a pour coordonnées  $(2; 5; k)$  dans une base orthonormée. Pour quelle valeur de  $k$   $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils orthogonaux ?

1.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , soit  $3 \times 2 + (-2) \times 5 + 4 \times k = 0$ .
2.  $6 - 10 + 4k = 0$
3.  $4k = 4$

---


$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux pour } k = 1.$$


---

3. Le plan P a pour équation cartésienne  $2x - y + 3z - 5 = 0$ . Quel vecteur est normal à P ?

1. Pour un plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ , le vecteur  $\vec{n}(a; b; c)$  lui est normal — c'est le contenu du programme sur le vecteur normal à un plan.
2. Ici  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 3$ , donc  $\vec{n}(2; -1; 3)$  est normal à P.
3.  $(1; 2; 0)$  vérifie  $2 \times 1 - 2 + 3 \times 0 = 0$  : il est orthogonal à  $\vec{n}$ , donc c'est un vecteur DIRECTEUR d'une droite du plan — pas le vecteur normal au plan lui-même.

---


$$\vec{n}(2; -1; 3) \text{ est un vecteur normal à P.}$$


---

## Étape 6 · Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Entoure :  $(-3 ; 2 ; -5)$  · Oui, pour  $k = 3$  · Non, car pour  $k = 1$  (dédit de  $x$ ), l'ordonnée  $-1 + 3 \times 1 = 2$  ne correspond pas à  $3$  ·  $3x - y + 2z + 1 = 0$  ·  $(4 ; -2 ; 1)$  · P1 et P2 sont confondus (les deux équations sont proportionnelles) ·  $(3 ; 0 ; 7)$

Je démontre :

**1. La droite  $d$  a pour représentation paramétrique  $x = 4 - 3k$ ,  $y = 1 + 2k$ ,  $z = -5k$ . Quel vecteur est un vecteur directeur de  $d$  ?**

1. Dans une représentation paramétrique  $x = x_0 + ak$ ,  $y = y_0 + bk$ ,  $z = z_0 + ck$ , les coefficients devant  $k$  donnent les coordonnées du vecteur directeur :  $a = -3$ ,  $b = 2$ ,  $c = -5$ .
2.  $(4 ; 1 ; 0)$  est le point de  $d$  obtenu pour  $k = 0$ , pas un vecteur directeur : confondre le point de départ et le vecteur directeur est une erreur classique de lecture d'un système paramétrique.

---

**$\vec{u}(-3 ; 2 ; -5)$  est un vecteur directeur de  $d$ .**

---

**2. La droite  $d$  a pour représentation paramétrique  $x = 2 + k$ ,  $y = -1 + 3k$ ,  $z = 4 - 2k$ . Le point  $M(5 ; 8 ; -2)$  appartient-il à  $d$  ?**

1. Je cherche  $k$  à partir de la coordonnée en  $x$  :  $5 = 2 + k$  donne  $k = 3$  — et non  $k = 5$ , qui serait la coordonnée  $x$  elle-même plutôt que la valeur du paramètre.
2.  $y : -1 + 3 \times 3 = -1 + 9 = 8$
3.  $z : 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
4. Les trois coordonnées de  $M$  correspondent bien à  $k = 3$  :  $M$  appartient à  $d$ .

---

**$M$  appartient à  $d$ , pour  $k = 3$ .**

---

**3. La droite  $d$  a pour représentation paramétrique  $x = 2 + k$ ,  $y = -1 + 3k$ ,  $z = 4 - 2k$ . Le point  $N(3 ; 3 ; 3)$  appartient-il à  $d$  ?**

1. Je déduis  $k$  de la coordonnée en  $x$  :  $3 = 2 + k$  donne  $k = 1$ .
2.  $y : -1 + 3 \times 1 = 2$
3. Or l'ordonnée de  $N$  vaut 3, pas 2 : cette valeur de  $k$  ne convient pas, et comme  $k$  est entièrement déterminé par  $x$ , aucune autre valeur n'est possible.  $N$  n'appartient pas à  $d$ .

---

**$N$  n'appartient pas à  $d$ .**

---

## Étape 7 · Le raisonnement par récurrence

**Entoure :** Rien : sans initialisation, aucun rang de départ n'est prouvé, et  $P(n)$  peut être fausse pour tout  $n$  · 6 · 4 · 1 · Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 0,  $P(n)$  est vraie · 3 · Elle est strictement croissante, car un carré ajouté à 1 est toujours strictement positif · Non : observer quelques termes ne prouve rien pour tout  $n$ , seule une récurrence (ou un calcul général) le justifie

**Je démontre :**

**1. Un élève démontre correctement l'hérédité d'une propriété  $P(n)$  pour une suite (« si  $P(n)$  est vraie, alors  $P(n + 1)$  est vraie »), mais ne vérifie jamais l'initialisation. Que peut-on conclure sur  $P(n)$  ?**

1. L'hérédité montre seulement une implication : « si c'est vrai à un rang, ce l'est au suivant » — elle ne dit jamais où cela commence à être vrai.
2. Exemple classique : la propriété «  $n = n + 1$  » a une hérédité triviale (il suffit d'ajouter 1 aux deux membres d'une égalité supposée vraie), et pourtant elle n'est vraie pour aucun entier  $n$ .
3. L'initialisation et l'hérédité sont toutes deux indispensables : l'une sans l'autre ne permet aucune conclusion.

---

**Sans initialisation vérifiée, l'hérédité seule ne prouve rien : c'est une erreur classique à ne jamais commettre.**

---

**2. Une suite décroissante vérifie  $u_0 = 10$  et  $u_{n+1} = (u_n + 4) / 2$  pour tout entier  $n$ . On veut démontrer par récurrence que  $u_n \geq 4$  pour tout  $n$ . En supposant  $u_n \geq 4$ , quel minorant obtient-on pour  $u_{n+1}$  ?**

1. J'applique l'hypothèse de récurrence  $u_n \geq 4$  à l'expression  $u_{n+1} = (u_n + 4) / 2$ .
2.  $(4 + 4) / 2 = 8 / 2 = 4$
3. J'obtiens  $u_{n+1} \geq 4$  : la propriété se transmet du rang  $n$  au rang  $n + 1$ .

---

**L'hérédité donne  $u_{n+1} \geq 4$  : la minoration proposée se transmet du rang  $n$  au rang  $n + 1$ .**

---

**3. Une suite vérifie  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 3 \times u_n - 2$  pour tout entier  $n$ . On veut démontrer par récurrence que  $u_n \geq 1$  pour tout  $n$ . En supposant  $u_n \geq 1$ , quel minorant obtient-on pour  $u_{n+1}$  ?**

1. J'applique l'hypothèse de récurrence  $u_n \geq 1$  à l'expression  $u_{n+1} = 3 \times u_n - 2$ .
2.  $3 \times 1 - 2 = 3 - 2 = 1$
3. J'obtiens  $u_{n+1} \geq 1$  : l'inégalité se transmet, avec ici une égalité possible au minorant.

---

**L'hérédité donne  $u_{n+1} \geq 1$  : la minoration proposée se transmet du rang  $n$  au rang  $n + 1$ .**

---

## Étape 8 · Limites de suites

**Entoure :** Tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang · 5 · 0 ·  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  · **Non :** il manque une minoration, le théorème des gendarmes exige un encadrement des DEUX côtés · 0 · Elle converge, mais pas nécessairement vers 10 ·  $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 200$

**Je démontre :**

### 1. Comment traduit-on, par définition, le fait qu'une suite $(u_n)$ converge vers le réel $\ell$ ?

1. Aussi petit soit l'intervalle ouvert autour de  $\ell$ , tous les termes de la suite finissent par y entrer et par y rester.
2. Converger ne signifie pas devenir constante : la suite peut continuer à varier, mais de plus en plus près de  $\ell$ .

---

**La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.**

---

### 2. On définit $u_n = 5 - 2/n$ pour $n \geq 1$ . Quelle est la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

1. Une limite usuelle :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - 2 \times (1/n) = 5 - 2 \times 0 = 5$

---

**$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$ , par opération sur les limites usuelles.**

---

### 3. Pour $q^n = 0,5^n$ (où $q^n$ désigne 0,5 à la puissance $n$ ), quelle est la limite de cette suite géométrique quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

1. Pour une suite géométrique  $(q^n)$ , le comportement dépend de  $q$  : si  $-1 < q < 1$ , la suite tend vers 0.
2. Ici  $q = 0,5$  vérifie bien  $-1 < 0,5 < 1$ .

---

**Comme  $-1 < 0,5 < 1$ , la suite  $(0,5^n)$  tend vers 0.**

---

## Étape 9 · Limites de fonctions

Entoure :  $+\infty$  · La droite d'équation  $x = 2$  ·  $0 \cdot 0 \cdot 0$  ·  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  · La droite d'équation  $y = 3$

Je démontre :

**1. Quelle est la limite de  $f(x) = -3x + 5$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ?**

1. Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $-3x$  tend vers  $+\infty$  (le produit d'un nombre négatif par un nombre qui tend vers  $-\infty$  tend vers  $+\infty$ ).
2. Ajouter 5 ne change rien au comportement en l'infini.

---


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$


---

**2. On définit  $f(x) = 1 / (x - 2)$ . Quelle droite est asymptote à la courbe de  $f$ , en lien avec le comportement de  $f$  en 2 ?**

1.  $f$  n'est pas définie en 2, et son dénominateur s'annule en 2 :  $|f(x)|$  devient arbitrairement grand quand  $x$  se rapproche de 2.
2. L'existence d'une limite infinie de  $f$  en 2 correspond exactement à une asymptote PARALLÈLE À L'AXE DES ORDONNÉES, d'équation  $x = 2$ .

---

**La droite d'équation  $x = 2$  est asymptote à la courbe de  $f$ , car  $f$  admet une limite infinie en 2.**

---

**3. On définit  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ . Sachant que  $\sqrt{x^2 + 1}$  tend vers  $+\infty$  et que  $-x$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?**

1. «  $+\infty - \infty$  » est une forme indéterminée : je ne peux PAS conclure directement, même si chaque terme a une limite infinie connue.
2.  $f(x) = (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x) / (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1 / (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
3. En multipliant par la quantité conjuguée, le dénominateur tend vers  $+\infty$  pendant que le numérateur reste égal à 1 : le quotient tend donc vers 0.

---

**Après multiplication par la quantité conjuguée,  $f(x)$  tend vers 0 : une forme indéterminée se lève par le calcul, jamais en tranchant à vue.**

---

## Étape 10 · Compléments sur la dérivation

**Entoure :**  $f'(x) = 3e^{3x+2}$ ,  $f'(0) = 3e^2$ ,  $f'(x) = x / \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $f'(2) = 2/\sqrt{5}$ ,  $f''(x) = 6x - 6$ ,  $f''(2) = 6$ . La dérivée de la fonction dérivée  $f' \cdot g'(x) = 6(3x - 1)$ ,  $g'(1) = 12$ ,  $g'(x) = -2e^{-2x+5}$ ,  $g'(2,5) = -2 \cdot 64$

**Je démontre :**

**1. On définit  $f(x) = e^{3x+2}$  (où  $e^{3x+2}$  désigne l'exponentielle de  $3x + 2$ ), composée de  $v(t) = e^t$  et  $u(x) = 3x + 2$ . Quelle est  $f'(x)$ , et combien vaut-elle en 0 ?**

1. Pour  $v(t) = e^t$ ,  $v'(t) = e^t$ , et  $u'(x) = 3$ .
2.  $f'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = e^{3x+2} \times 3 = 3e^{3x+2}$
3.  $f'(0) = 3 \times e^2$

---


$$f'(x) = 3e^{3x+2}, \text{ donc } f'(0) = 3e^2.$$


---

**2. On définit  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , composée de  $v(t) = \sqrt{t}$  et  $u(x) = x^2 + 1$ . Quelle est  $f'(x)$ , et combien vaut-elle en 2 ?**

1. Pour  $v(t) = \sqrt{t}$ ,  $v'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ , et  $u'(x) = 2x$ .
2.  $f'(x) = (1/(2\sqrt{x^2 + 1})) \times 2x = x/\sqrt{x^2 + 1}$
3.  $f'(2) = 2/\sqrt{2^2 + 1} = 2/\sqrt{5}$

---


$$f'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}, \text{ donc } f'(2) = 2/\sqrt{5}.$$


---

**3. On définit  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ . Quelle est  $f''(x)$  (la dérivée seconde de  $f$ ), et combien vaut-elle en 2 ?**

1. Je calcule d'abord la dérivée première :  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ .
2. La dérivée seconde  $f''$  est la dérivée de  $f'$  :  $f''(x) = 6x - 6$ .
3.  $f''(2) = 6 \times 2 - 6 = 12 - 6 = 6$

---


$$f''(x) = 6x - 6, \text{ donc } f''(2) = 6.$$


---

## Étape 11 · Convexité

**Entoure :**  $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$  · **Des points d'inflexion** · **Au-dessus**, car  $f(2) = 4$  est supérieur à l'ordonnée 3 de la tangente en  $x = 2$  · **En dessous**, car  $f(1) = 1$  est inférieur à l'ordonnée du milieu de  $[AB]$ , qui vaut 2 ·  **$f$  est convexe sur cet intervalle** ·  **$f'$  est positive** (car  $f$  croissante) et **croissante** (car  $f$  convexe) ·  **$e^x \geq 1 + x$**

**Je démontre :**

**1. Une fonction  $f$  est convexe ET croissante sur un intervalle. Que peut-on en déduire sur  $f'$  sur cet intervalle ?**

1. La croissance de  $f$  et sa convexité sont deux informations DIFFÉRENTES, qui ne se déduisent pas l'une de l'autre : il faut les combiner, pas en garder une seule.
2. «  $f$  croissante » donne le signe de  $f'$  (positive) ; «  $f$  convexe » donne le sens de variation de  $f'$  (croissante) : les deux informations se cumulent.

---

**$f$  croissante donne  $f'$  positive ;  $f$  convexe donne  $f'$  croissante : ce sont deux informations distinctes, à ne jamais confondre.**

---

**2. La fonction exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$ , et sa tangente en 0 a pour équation  $y = 1 + x$ . Quelle inégalité peut-on en déduire, valable pour tout réel  $x$  ?**

1. Une fonction convexe a sa courbe TOUJOURS au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. La tangente à la courbe de l'exponentielle en 0 a pour équation  $y = 1 + x$  : la courbe de l'exponentielle lui reste donc supérieure ou égale, pour tout réel  $x$ .

---

**Par convexité de l'exponentielle,  $e^x \geq 1 + x$  pour tout réel  $x$  : la courbe reste au-dessus de sa tangente en 0.**

---

## Étape 12 · Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

**Entoure :** Continue en 0, mais pas dérivable en 0 · 4 · Il existe au moins une solution dans  $]1 ; 2[$  ·

**Exactement une,** car  $f$  est continue et strictement monotone ·  $[1,5 ; 2]$  ·  $\ell = (\ell + 6) / 2$ , donc  $\ell = 6$  · **Non,** la continuité sur l'intervalle est une hypothèse indispensable du théorème

**Je démontre :**

### 1. La fonction valeur absolue est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

1. Toute fonction dérivable en un point  $y$  est continue, mais la réciproque est fausse.
2. La valeur absolue est continue en 0 (sa limite en 0 vaut bien  $|0| = 0$ ), mais son taux de variation vaut  $-1$  à gauche et  $1$  à droite : elle n'y est pas dérivable.

---

**La valeur absolue est continue en 0 sans y être dérivable : la continuité n'entraîne jamais la dérivabilité.**

---

### 2. Une suite vérifie $u_n = 1 + 1/n$ pour $n \geq 1$ , et converge vers 1. On définit la fonction continue $f(x) = x^2 + 3$ . Quelle est la limite de la suite $(f(u_n))$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

1. Si une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et si  $f$  est continue en  $\ell$ , alors  $(f(u_n))$  converge vers  $f(\ell)$ .
2. Ici la suite converge vers 1, et  $f$  est continue partout (c'est une fonction polynôme).
3.  $f(1) = 1^2 + 3 = 4$

---

**La suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(1) = 4$ , car  $f$  est continue en la limite 1 de  $(u_n)$ .**

---

### 3. On sait que $f$ est continue et strictement croissante sur $[0 ; 2]$ , avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 10$ .

**Combien l'équation  $f(x) = 5$  admet-elle de solutions dans  $[0 ; 2]$  ?**

1. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'EXISTENCE d'une solution dès que  $f$  est continue et que 5 est compris entre  $f(0)$  et  $f(2)$ .
2. La stricte monotonie ajoute l'UNICITÉ de cette solution : c'est le cas particulier des fonctions continues strictement monotones.

---

**L'équation  $f(x) = 5$  admet exactement une solution dans  $[0 ; 2]$ , grâce à la continuité et à la stricte croissance de  $f$ .**

---

### Étape 13 · Logarithme népérien : réciproque et propriétés

Entoure : 4 · ln(12) · Non : ln(a + b) n'est JAMAIS égal à ln(a) + ln(b) en général · ln(3) + ln(4) · ln(7) – ln(3) · e<sup>2</sup> · ]1/2 ; 1]

Je démontre :

#### 1. Quelle est la valeur de ln(e<sup>4</sup>) (où e<sup>4</sup> désigne l'exponentielle de 4) ?

1. Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre : composer l'une avec l'autre redonne l'entrée de départ.
2. ln(e<sup>4</sup>) = 4

---

**ln(e<sup>4</sup>) = 4, car ln et exp sont réciproques.**

---

#### 2. Quelle est la solution de l'équation e<sup>x</sup> = 12 (avec e<sup>x</sup> l'exponentielle de x) ?

1. Composer le logarithme avec l'exponentielle redonne l'entrée de départ : e<sup>x</sup> = 12 équivaut à x = ln(12), en appliquant ln aux deux membres.
2. ln(e<sup>x</sup>) = ln(12) donc x = ln(12)

---

**L'équation e<sup>x</sup> = 12 a pour unique solution x = ln(12), car ln et exp sont réciproques.**

---

#### 3. Karim affirme que ln(4 + 5) est égal à ln(4) + ln(5). A-t-il raison ?

1. La seule règle du programme porte sur un PRODUIT : ln(ab) = ln(a) + ln(b) — rien de tel n'existe pour une somme.
2. ln(9) (environ 2,197) est différent de ln(4) + ln(5) (environ 1,386 + 1,609 = 2,996) : le calcul confirme que l'égalité est fausse.

---

**ln(a + b) n'est jamais égal à ln(a) + ln(b) : la propriété algébrique du logarithme porte sur un produit, pas sur une somme.**

---

## Étape 14 · Étude de la fonction logarithme

**Entoure :** Strictement croissante, car sa dérivée  $1/x$  est strictement positive ·  $-\infty \cdot +\infty \cdot 0 \cdot 0 \cdot f'(x) = 3/(3x + 2)$ ,  $f'(1) = 3/5$  ·  $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$  ;  $f'(2) = 4/5$

**Je démontre :**

### 1. Quelle est la limite de $\ln(x)$ quand $x$ tend vers 0, avec $x$ strictement positif ?

1. C'est une limite de référence du programme :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ .
2. La courbe de  $\ln$  admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

---

**$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$  : c'est une limite de référence.**

---

### 2. Quelle est la limite de $\ln(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

1. C'est une autre limite de référence du programme :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .
2.  $\ln$  n'a pas d'asymptote horizontale : elle grandit indéfiniment, mais de plus en plus lentement.

---

**$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  : c'est une limite de référence.**

---

### 3. Quelle est la limite de $\ln(x) / x$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

1. C'est un résultat de croissance comparée : en  $+\infty$ ,  $x$  l'emporte toujours sur  $\ln(x)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$

---

**Par croissance comparée,  $\ln(x)/x$  tend vers 0 en  $+\infty$  :  $x$  l'emporte toujours sur  $\ln(x)$ .**

---

## Étape 15 · Fonctions sinus et cosinus

Entoure :  $-\sin$  · Paire, car  $\cos(-x) = \cos(x)$  pour tout réel  $x$  ·  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  pour tout réel  $x$  ·  $\cos$  est décroissante sur  $[0 ; \pi]$  ·  $x = \pi/3$  ou  $x = -\pi/3$  ·  $[-\pi ; -\pi/3] \cup [\pi/3 ; \pi]$  ·  $\theta = \pi/4$ , aire maximale égale à 1

Je démontre :

### 1. Quelle est la fonction dérivée de $\cos$ sur $\mathbb{R}$ ?

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- Contrairement à  $\sin$ , la dérivée de  $\cos$  porte un signe moins.

---

**La fonction dérivée de  $\cos$  est  $-\sin$  (avec le signe moins).**

---

### 2. La fonction $\cos$ est-elle paire ou impaire sur $\mathbb{R}$ ?

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- Sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées — à l'inverse de  $\sin$ , qui est impaire ( $\sin(-x) = -\sin(x)$ ).

---

**$\cos$  est paire sur  $\mathbb{R}$  :  $\cos(-x) = \cos(x)$  pour tout réel  $x$ .**

---

### 3. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période $2\pi$ . Que peut-on en déduire sur $\sin(x + 2\pi)$ ?

- Une fonction périodique de période  $2\pi$  reprend exactement les mêmes valeurs tous les  $2\pi$ .
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

---

**Par périodicité de période  $2\pi$ ,  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  pour tout réel  $x$ .**

---

## Étape 16 · Primitives

Entoure :  $F(x) = x^4/4$  ·  $F(x) = -1/x$  ·  $F(x) = 2\sqrt{x}$  ·  $F(x) = (1/2)e^{2x}$  ·  $F(x) = -(1/3)\cos(3x)$  ·  $F(x) = (x^2 + 1)^4/4$  ·

Non :  $F(x) = x^3 + k$  est une primitive de  $f$ , quelle que soit la constante réelle  $k$

Je démontre :

### 1. Quelle est une primitive de $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$ ?

1. La primitive de référence de  $x^n$  ( $n$  entier positif) est  $x^{n+1}/(n+1)$ .

2.  $(x^4/4)' = 4x^3/4 = x^3$

---

**$F(x) = x^4/4$  est une primitive de  $x^3$ , car sa dérivée redonne  $x^3$ .**

---

### 2. Quelle est une primitive de $f(x) = 1/x^2$ (soit $x^{-2}$ ) sur $]0; +\infty[$ ?

1. La primitive de référence de  $x^n$  reste  $x^{n+1}/(n+1)$ , y compris pour  $n$  négatif différent de  $-1$  : ici  $n = -2$ .

2.  $F(x) = x^{-1}/(-1) = -1/x$

3.  $(-1/x)' = 1/x^2$

---

**$F(x) = -1/x$  est une primitive de  $1/x^2$ , car sa dérivée redonne  $1/x^2$ .**

---

### 3. Quelle est une primitive de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ ?

1. C'est une primitive de référence à connaître : la primitive de  $1/\sqrt{x}$  est  $2\sqrt{x}$ .

2.  $(2\sqrt{x})' = 2 \times 1/(2\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}$

---

**$F(x) = 2\sqrt{x}$  est une primitive de  $1/\sqrt{x}$ , car sa dérivée redonne  $1/\sqrt{x}$ .**

---

## Étape 17 · Équations différentielles

Entoure :  $C = 5$ , solution  $y = 5e^{-2x} - 3$  ·  $y = 4e^{2x} - 3$  · Non : il manque la solution particulière constante ; la bonne solution générale est  $y = Ce^{2x} - 3$  · Oui, car  $y' = 2y$  pour cette fonction ·  $y = -4e^{-x} + 4$  ·  $y = Ce^x + x$

Je démontre :

1. Les solutions de  $y' = -2y$  sont les fonctions  $y = Ce^{-2x}$ . Sachant que  $y(0) = 5$ , quelle est la valeur de  $C$ , et quelle est la solution ?

1.  $y(0) = C \times e^0 = C$
2.  $C = 5$
3. La solution est donc  $y = 5e^{-2x}$ .

---

**$C = 5$ , donc la solution est  $y = 5e^{-2x}$ .**

---

2. Pour l'équation différentielle  $y' = 2y + 6$ , on cherche une solution particulière **CONSTANTE**  $y = k$ . Quelle est la valeur de  $k$  ?

1. Une solution constante vérifie  $y' = 0$ , donc  $0 = 2k + 6$ .
2.  $2 \times (-3) + 6 = 0$

---

**La solution particulière constante est  $y = -3$ , car  $2 \times (-3) + 6 = 0$ .**

---

3. D'après la question précédente,  $y = -3$  est une solution particulière de  $y' = 2y + 6$ . Sachant que la solution générale de  $y' = 2y$  est  $y = Ce^{2x}$ , et que  $y(0) = 1$ , quelle est la solution de  $y' = 2y + 6$  vérifiant cette condition initiale ?

1. La solution générale de  $y' = 2y + 6$  est la somme de la solution générale de  $y' = 2y$  et de la solution particulière :  $y = Ce^{2x} - 3$ .
2.  $y(0) = C \times 1 - 3 = C - 3$
3.  $C - 3 = 1$  donc  $C = 4$

---

**La solution cherchée est  $y = 4e^{2x} - 3$ .**

---

## Étape 18 · Calcul intégral

Entoure :  $26/3 \cdot 11 \cdot \int_0^2 f(x) dx \leq 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1/6$

Je démontre :

1. On donne  $F(x) = x^3/3$ , une primitive de  $f(x) = x^2$ . Que vaut  $\int_1^3 x^2 dx$  ?

1. J'applique la relation  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  avec  $a = 1$  et  $b = 3$ .

2.  $F(3) - F(1) = 3^3/3 - 1^3/3 = 27/3 - 1/3$

3.  $27/3 - 1/3 = 26/3$

---

**$\int_1^3 x^2 dx = F(3) - F(1) = 26/3$ . Inverser les bornes (calculer  $F(1) - F(3)$ ) donnerait le signe opposé,  $-26/3$  : une erreur classique.**

---

2. On sait que  $\int_0^1 f(x) dx = 4$ . Que vaut  $\int_0^1 (2f(x) + 3) dx$  ?

1. Par linéarité,  $\int_0^1 (2f(x) + 3) dx = 2 \times \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 3 dx$ .

2.  $2 \times 4 + 3 \times 1 = 11$

---

**$\int_0^1 (2f(x) + 3) dx = 2 \times 4 + 3 \times (1 - 0) = 11$ , par linéarité.**

---

3. Pour tout  $x$  de  $[0 ; 2]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . Sachant que  $\int_0^2 g(x) dx = 9$ , que peut-on affirmer sur  $\int_0^2 f(x) dx$  ?

1. L'intégration conserve les inégalités entre deux fonctions sur un même intervalle : majorer  $f$  par  $g$  permet de majorer l'intégrale de  $f$  par celle de  $g$ .

---

**Comme  $f(x) \leq g(x)$  sur  $[0 ; 2]$ , on a  $\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 g(x) dx = 9$ .**

---

## Étape 19 · Succession d'épreuves indépendantes

Entoure :  $64/125 \cdot 1/4 \cdot 81/100$  · Il est faux : un tirage sans remise n'est PAS indépendant, il faut écrire  $P(\text{rouge puis rouge}) = 4/10 \times 3/9 = 2/15 \cdot 1/24 \cdot 39/400$  · En multipliant les probabilités inscrites sur les trois branches empruntées

Je démontre :

**1. Un horticulteur sème trois graines de la même variété. Chaque graine germe avec la probabilité  $4/5$ , indépendamment des autres. Quelle est la probabilité que les trois graines germent ?**

1. Les trois germinations sont des épreuves indépendantes et identiques : la probabilité que les trois se réalisent est le PRODUIT de leurs probabilités.
2.  $4/5 \times 4/5 \times 4/5 = 64/125$

---

**P(les trois germent) =  $64/125$ .**

---

**2. Un jardinier sème trois graines d'espèces DIFFÉRENTES (une succession de trois épreuves quelconques, mais indépendantes) : elles germent respectivement avec les probabilités  $3/4$ ,  $2/3$  et  $1/2$ . Quelle est la probabilité que les trois graines germent ?**

1. Même si les trois épreuves ne sont pas identiques, elles restent indépendantes : la probabilité que les trois se réalisent reste le produit des trois probabilités.
2.  $3/4 \times 2/3 \times 1/2 = 1/4$
3. Faire la MOYENNE des trois probabilités n'a ici aucun sens : ce n'est pas la règle du modèle de la succession d'épreuves indépendantes.

---

**P(les trois germent) =  $1/4$ .**

---

**3. Une urne contient 10 boules : 4 rouges et 6 bleues. On tire deux boules SANS remise. Un élève affirme, sans le justifier, que les deux tirages sont indépendants, et calcule  $P(\text{rouge puis rouge}) = 4/10 \times 4/10 = 4/25$ . Que penser de ce calcul ?**

1. Un tirage SANS remise change la composition de l'urne : le second tirage dépend du résultat du premier, les deux épreuves ne sont PAS indépendantes.
2. Appliquer quand même la règle du produit avec la MÊME probabilité aux deux tirages est une erreur classique : il faut une probabilité CONDITIONNELLE au second tirage, calculée sur les 9 boules restantes, dont 3 rouges seulement.
3.  $4/10 \times 3/9 = 2/15$

---

**P(rouge puis rouge) =  $2/15$  : l'indépendance ne se suppose jamais, elle se justifie (ici, elle est fausse).**

---

## Étape 20 · Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Entoure : 21/100 · indépendantes et identiques (même paramètre  $p$  à chaque répétition) ·  $\binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$  · 40/243 · 0,2916 · 15/64 · 2

Je démontre :

**1. Une variable de Bernoulli  $X$ , égale à 1 en cas de succès et 0 sinon, a pour paramètre  $p = 3/10$ .**

**Quelle est sa variance  $V(X)$  ?**

1. Pour une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $E(X) = p$  et  $V(X) = p \times (1 - p)$  : ne jamais confondre la variance avec  $p$  seul.
2.  $3/10 \times 7/10 = 21/100$

---


$$V(X) = p(1 - p) = 21/100.$$


---

**2. Un schéma de Bernoulli est la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli ...**

1. Un schéma de Bernoulli exige à la fois l'indépendance des épreuves ET l'identité de leur paramètre  $p$  : c'est ce qui le distingue d'une succession d'épreuves quelconques, où les probabilités peuvent différer d'une épreuve à l'autre.

---

**Un schéma de Bernoulli est la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.**

---

**3. Si  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n ; p)$ , quelle est l'expression correcte de  $P(X = k)$  ?**

1. La loi binomiale compte, parmi les  $\binom{n}{k}$  chemins de l'arbre menant à  $k$  succès, chacun de probabilité  $p^k(1 - p)^{n-k}$  : jamais l'inverse sur les exposants.
2. Oublier le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  revient à ne compter qu'UN seul chemin, alors qu'il y en a plusieurs qui donnent  $k$  succès.

---


$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$


---

## Étape 21 · Problèmes sur la loi binomiale

Entoure : Passer au complémentaire :  $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \cdot 3 \cdot V(X) = n \times p \times (1 - p) = 2,55 \cdot 1,6 \cdot 2 \cdot 4$

Je démontre :

**1. Y suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(5 ; 1/5)$ . Quelle méthode donne directement  $P(Y \geq 1)$  sans additionner cinq termes ?**

1. «  $Y \geq 1$  » est l'évènement contraire de «  $Y = 0$  » : passer au complémentaire évite d'additionner les cinq termes  $P(Y = 1)$  à  $P(Y = 5)$ .
2.  $P(Y = 0) = (4/5)^5 = 1024/3125$
3.  $P(Y \geq 1) = 1 - 1024/3125 = 2101/3125$

---


$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 2101/3125.$$


---

**2. X suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(20 ; 0,15)$ . Quelle est son espérance  $E(X)$  ?**

1. Pour une loi binomiale  $\mathcal{B}(n ; p)$ ,  $E(X) = n \times p$  — jamais  $p$  seul, ni  $n$  seul.
2.  $20 \times 0,15 = 3$

---


$$E(X) = n \times p = 3.$$


---

**3. Toujours pour X suivant  $\mathcal{B}(20 ; 0,15)$ , quelle formule donne correctement la variance  $V(X)$  ?**

1. La variance d'une loi binomiale est  $V(X) = n \times p \times (1 - p)$  : oublier le facteur  $(1 - p)$ , ou oublier de multiplier par  $n$ , sont deux erreurs classiques.
2.  $20 \times 0,15 \times 0,85 = 2,55$

---


$$V(X) = n \times p \times (1 - p) = 2,55.$$


---

## Étape 22 · Sommes de variables aléatoires

Entoure : 12 · Oui, la linéarité de l'espérance est toujours vraie, indépendance ou non · 5 · Non : l'additivité de la variance n'est valable QUE pour des variables indépendantes, sans cette hypothèse rien ne le garantit · 36 · 70 · 2

Je démontre :

1. On donne  $E(X) = 4$ . Quelle est la valeur de  $E(3X)$  ?

1.  $E(3X) = 3 \times E(X) = 3 \times 4 = 12$

---

$E(3X) = 12.$

---

2. La formule  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  est-elle valable même lorsque X et Y ne sont PAS indépendantes ?

1. La linéarité de l'espérance ne demande AUCUNE hypothèse d'indépendance :  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  reste vraie que X et Y soient indépendantes ou non.

2. C'est la variance, elle, qui exige l'indépendance pour s'additionner : ne pas confondre les deux propriétés.

---

**La linéarité de l'espérance est toujours vraie, sans aucune condition d'indépendance.**

---

3. X et Y sont deux variables aléatoires INDÉPENDANTES telles que  $V(X) = 2$  et  $V(Y) = 3$ . Quelle est la valeur de  $V(X + Y)$  ?

1. Pour des variables aléatoires INDÉPENDANTES, la variance de leur somme est la somme de leurs variances.

2.  $2 + 3 = 5$

---

**$V(X + Y) = 5$  (l'indépendance de X et Y est indispensable ici).**

---

### Étape 23 · Concentration et loi des grands nombres

Entoure :  $1/4$  ·  $1/25$  ·  $720$  · Un MAJORANT de la probabilité, pas sa valeur exacte · Pour tout  $\delta$  strictement positif,  $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$  tend vers  $0$  · Il diminue, et tend vers  $0$  ·  $1/4$

Je démontre :

1. Une variable aléatoire  $X$  a pour variance  $V(X) = 4$ . D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quel majorant obtient-on pour  $P(|X - \mu| \geq 4)$  ?

$$1. 4/4^2 = 4/16 = 1/4$$

---


$$P(|X - \mu| \geq 4) \leq 1/4.$$


---

2.  $M_n$  est la moyenne d'un échantillon de taille  $n = 100$  d'une variable aléatoire de variance  $V = 16$ . D'après l'inégalité de concentration, quel majorant obtient-on pour  $P(|M_{100} - \mu| \geq 2)$  ?

1. L'inégalité de concentration est  $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n \times \delta^2)$  : le  $n$  se glisse au DÉNOMINATEUR, en plus de  $\delta^2$ .

2.  $16/(100 \times 2^2) = 16/400 = 1/25$

---


$$P(|M_{100} - \mu| \geq 2) \leq 1/25.$$


---

3. Une variable aléatoire a pour variance  $V = 9$ . On veut garantir  $P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq 0,05$ . D'après l'inégalité de concentration, quelle est la plus petite taille d'échantillon  $n$  qui convient ?

1. Je pars de  $V/(n \times \delta^2) \leq \text{risque}$ , et j'isole  $n$  en divisant :  $n \geq V/(\delta^2 \times \text{risque})$ .

2.  $9/(0,5^2 \times 0,05) = 9/0,0125 = 720$

---


$$\text{La plus petite taille d'échantillon qui convient est } n = 720.$$


---

## Étape 24 · Python : simulation et échantillons

Entoure :  $4 \cdot 2 \cdot [0, 1, 0, 1, 1, 0] \cdot 7/10 \cdot 1 \cdot [0, 1, 2, 1, 2] \cdot 2,83$

Je démontre :

1. On exécute `echantillon = [2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9]`

`moyenne = sum(echantillon) / len(echantillon)`. La moyenne obtenue vaut 5. Quelle est la variance de cet échantillon (moyenne des carrés des écarts à la moyenne) ?

1. Chaque écart à la moyenne 5 est -3, -1, -1, -1, 0, 0, 2, 4.

2.  $(9 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 4 + 16) / 8 = 4$

---

**La variance de cet échantillon est 4.**

---

2. Avec la variance 4 trouvée pour cet échantillon, quel est son écart type ?

1. L'écart type d'un échantillon est la racine carrée de sa variance.

2.  $\sqrt{4} = 2$

---

**L'écart type de cet échantillon est 2.**

---

3. On exécute `tirages = [3, 6, 2, 6, 6, 1]`

`indicateurs = [1 if x == 6 else 0 for x in tirages]`. Quelle est la valeur de `indicateurs` ?

1. La liste en compréhension parcourt `tirages` et place un 1 lorsque la valeur vaut 6, un 0 sinon.

2. Dans `[3, 6, 2, 6, 6, 1]`, le 6 apparaît aux positions correspondant à `[1, 3, 4]`.

---

**`indicateurs` vaut `[0, 1, 0, 1, 1, 0]`.**

---

## LE GRAND BILAN · CORRIGÉ

1. 120

2.  $-\infty$

3. 0

4. 0

5. 8

6. 7

7.  $+\infty$

8.  $F(x) = x^2 + 3$

9.  $+\infty$

10. 2

11. 120

12. 1

13. 5

14.  $\cos$

15. 3

16.  $]1/2 ; 1]$

17.  $(2 ; -1 ; 3)$

18.  $1/x$

19. 2

20. 1,6

21.  $F(x) = (1/2)e^{2x}$

22.  $(2 ; -4 ; 6)$

23. 4

24.  $11/32$

25. 15

26. 0

27. 0

28.  $F(x) = 2\sqrt{x}$



# La démonstration, ton meilleur outil

Un cahier ordinaire donne une réponse et voilà. Celui-ci va plus loin : chaque question a sa **démonstration animée**, gratuite, sur le site — les étapes s'affichent une par une jusqu'au résultat encadré, C.Q.F.D. Et chaque fiche méthode existe en capsule vidéo.

**24 fiches méthode, jamais réinventées**

**193 questions entourées, 72 démonstrations à rédiger**

**Un QR par étape vers la démonstration animée du site**

**24 médailles à colorier, un diplôme à la fin**



**Ton coach t'attend en ligne :** les autres classes, du CE1 à la terminale, les fiches en vidéo et le carnet de suivi. [moncoachdemath.fr](https://moncoachdemath.fr)